1 à 8 9 à 14

CH 10 LA DYNAMIQUE DE ROTATION

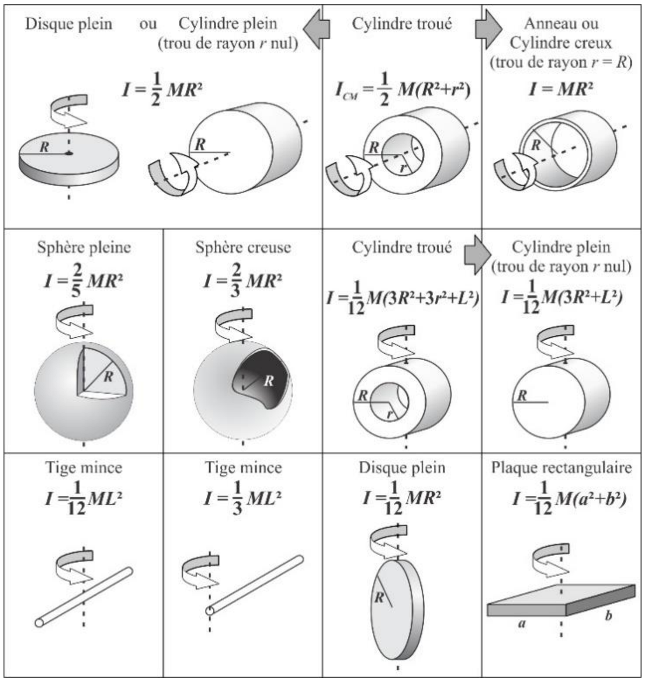
CONSTANTES UTILES

$g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

ÉQUATIONS LIÉES AU CHAPITRE :

$$\boxed{\sum \tau = I\alpha}$$

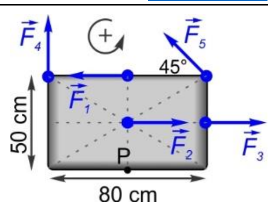
$$\boxed{\tau = \pm rF\sin\theta_{rF}}$$



10.1 LE MOMENT DE FORCE

10.1 Exercice : Calcul de moment de force solution ►

Soit une plaque rectangulaire subissant cinq forces d'un module identique de 10 N et configurées selon la figure ci-contre.

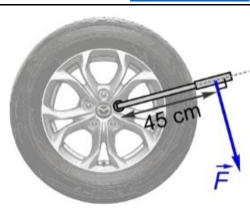


a) En considérant un axe de rotation perpendiculaire à la plaque et passant par le point P ainsi qu'un sens antihoraire positif, calculez le moment de force de chaque force.

b) Vrai ou Faux : deux forces de même module et appliquées sur la même droite (comme $\vec{F}_2$ et $\vec{F}_3$) auront toujours des moments de force de même module.

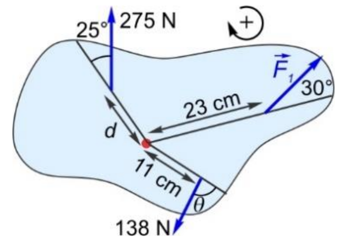
10.2 Exercice : La crevaison solution ►

Les écrous de roue d'un certain modèle de voiture doivent être serrés avec un moment de force de 160 N·m. Si on utilise un outil avec un manche de 45 cm pour serrer cet écrou et qu'on force perpendiculairement à la barre de l'outil, quelle force doit-on appliquer pour atteindre le moment de force indiqué?



10.3 Exercice : L'angle solution ►

Sur le montage de la figure suivante, les trois forces ont des moments de force d'un module de 15 N·m.



Déterminez :

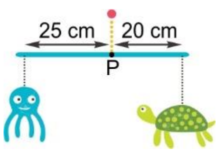
a) F_1;
b) θ ;
c) d.
d) Quel est le moment de force total agissant sur le corps?

10.4 Exercice : Signe du moment de force

Essayez ces exercices en ligne pour vérifier si vous maîtrisez la détermination du sens ou signe d'un moment de force.

10.5 Exercice : Le mobile solution ►

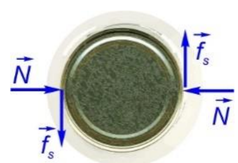
Un mobile de chambre d'enfant est constitué de deux objets suspendus en équilibre à une tige horizontale (de masse négligeable). On sait que la pieuvre a une masse de 33,0 g et les distances au point de suspension de la tige sont celles indiquées sur la figure.



a) Vrai ou Faux : La tortue doit être plus légère pour qu'il y ait équilibre de la tige horizontale.
b) Quelle est la masse de la tortue?

10.6 Exercice : Le bocal solution ►

Le couvercle d'un bocal de 9 cm de diamètre est fermement vissé et requiert un moment de force de 3,50 N·m pour s'ouvrir. En simplifiant l'action pour l'ouvrir à deux forces de frottement liées à des normales de 115 N appliquées en deux points opposés du couvercle et générant deux moments de force (voir figure) :

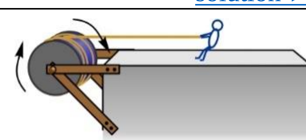


a) déterminez le coefficient de frottement statique minimal permettant d'ouvrir ce bocal.
b) Vrai ou Faux : un coefficient de frottement plus élevé permet de réduire la force normale (force de pression des mains) requise pour ouvrir le bocal.

10.2 LA 2E LOI DE NEWTON EN ROTATION

10.7 Exercice : Le rouleau solution ►

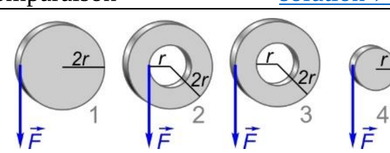
M. Allumette tire avec une force de 120 N sur une corde enroulée autour d'un gros cylindre plein de 1,80 m de diamètre et de 325 kg.



a) Déterminez le module de l'accélération angulaire du cylindre.
b) Vrai ou Faux : si M. Allumette applique une force deux fois plus grande, l'accélération angulaire sera quatre fois plus grande.

10.8 Exercice : La comparaison solution ►

Les quatre disques ci-contre (troués ou pleins et d'épaisseur identique) sont fabriqués du même matériau de masse volumique ρ et sont soumis à une force identique vers le bas, à l'endroit indiqué sur l'illustration.

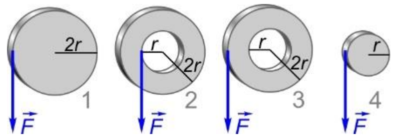


10.1- a) τ_1 = 5,00 N·m — τ_2 = -2,50 N·m — τ_3 = -2,50 N·m — τ_4 = -4,00 N·m — τ_5 = 6,36 N·m — b) Vrai — 10.2- F = 356 N — 10.3- a) F_1 = 130 N — b) θ = 81,2° — c) d = 12,9 cm° — d) τ_{tot} = +15 N·m — 10.4- — 10.5- a) Faux — b) m = 41,3 g — 10.6- a) μ_s = 0,338 — b) Vrai — 10.7- a) α = 0,821 rad/s² — b) Faux — 10.8- a) $I_4 < I_2 = I_3 < I_1$ — b) $\tau_4 = \tau_2 < \tau_3 = \tau_1$

a) Placez en ordre croissant les valeurs de leurs moments d'inertie (I_1, I_2, I_3 et I_4) par rapport à un axe perpendiculaire aux disques et passant par le centre.
b) Placez en ordre croissant les modules des moments de force agissant sur eux, τ_1, τ_2, τ_3, et τ_4 par rapport aux mêmes axes qu'en a).

10.9 Exercice : La comparaison II — solution ►

Les quatre disques de l'exercice précédent sont fabriqués d'un même matériau de masse volumique ρ.



a) Évaluez le rapport m_2/m_4.
b) Établissez l'expression algébrique simplifiée de la masse de chaque disque, en fonction de la masse volumique ρ, de l'épaisseur e et du rayon r.

En posant $z = \rho e \pi r^2$:

c) Établissez l'expression algébrique simplifiée du moment d'inertie de chaque disque, par rapport à un axe perpendiculaire aux disques et passant par le centre.
d) Établissez l'expression algébrique simplifiée de l'accélération angulaire de chaque disque.
e) Placez en ordre croissant les accélérations angulaires des quatre disques, α_1, α_2, α_3 et α_4.

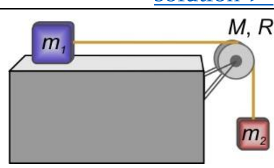
10.10 Exercice : Le manège — solution ►

Un certain manège tournant avec tous ses passagers présente un moment d'inertie de 6500 kg·m². Le moteur qui le fait fonctionner applique un moment de force τ constant durant 30 secondes pour l'accélérer du repos jusqu'à 0,900 rad/s.

a) Quel est le module du moment de force résultant agissant sur le manège?
b) S'il s'avère que le moteur fournit en réalité un moment de force de 220 N·m durant l'accélération, quel est le module du moment de force du frottement dans le mécanisme qui s'oppose à la rotation?
c) Si le moteur s'arrête et que le moment de force du frottement demeure le même, combien de temps mettrait le manège pour s'immobiliser sous le seul effet du moment de force du frottement?

10.11 Exercice : La poulie — solution ►

Dans le montage ci-contre, m_1 = 2 kg, m_2 = 700 g, M = 600 g et R = 15 cm. Il n'y a aucun frottement sur la surface horizontale et la poulie est un cylindre plein.



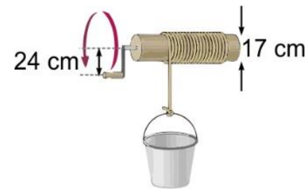
a) Quelle sera l'accélération angulaire de la poulie?
b) Quelle sera la tension dans la portion verticale de la corde?
c) Vrai ou Faux : si on augmente la masse de la poulie, la tension de la portion verticale de la corde sera plus élevée.

10.12 Exercice : Le rouleau II — solution ►

Une masse de 25 g est suspendue à une corde enroulée sur un cylindre creux de 18 cm de diamètre. Si la masse accélère vers le bas au taux de 1,10 m/s², déterminez la masse du cylindre creux.

10.13 Exercice : Le puits — solution ►

Un puits est muni d'un treuil manuel pour remonter une chaudière d'eau. Le rouleau sur lequel s'enroule la corde a un diamètre de 17 cm et une masse de 2,5 kg. Quelle force perpendiculaire au bras de la manivelle faudra-t-il appliquer sur la poignée pour remonter une chaudière de 7 kg :



a) à vitesse constante?
b) avec une accélération vers le haut de 1,20 m/s²?

10.14 Exercice : Le yoyo — solution ►

Soit un yoyo de 200 g et dont le moment d'inertie est $3{,}6\times10^{-4}$ kg·m² (par rapport au centre). Sa corde est enroulée sur un moyeu d'un rayon de 7,0 mm au centre du yoyo.

a) Déterminez le module de l'accélération du yoyo si on le laisse simplement se dérouler verticalement en tenant fixe l'extrémité de la corde.
b) Combien de temps lui faudra-t-il pour effectuer 100 rotation complètes s'il tombe à partir du repos?

10.9- a) $m_2/m_4 = 3$ — b) $m_1 = 4\rho e\pi r^2$, $m_2 = m_3 = 3\rho e\pi r^2$, $m_4 = \rho e\pi r^2$ — c) $I_1 = 8zr^2$, $I_2 = I_3 = \frac{15}{2} zr^2$, $I_4 = \frac{1}{2} zr^2$, — d) $\alpha_1 = \frac{F}{4zr}$, $\alpha_2 = \frac{2F}{15zr}$, $\alpha_3 = \frac{4F}{15zr}$, $\alpha_4 = \frac{2F}{zr}$, — e) $\alpha_2 < \alpha_1 < \alpha_3 < \alpha_1$ — **10.10**- a) τ = 195 N·m — b) τ_f = 25,0 N·m — c) t = 234 s — **10.11**- a) α = 15,3 rad/s² — b) T_2 = 5,26 N — c) Vrai
10.12- M = 198 g — **10.13**- a) F = 24,3 N — b) F = 27,8 N — **10.14**- a) a = 0,260 m/s² — b) t = 5,82 s

1 à 8 9 à 14

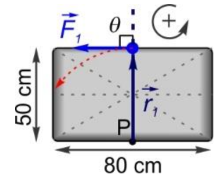
CH 10 LA DYNAMIQUE DE ROTATION

10.1 LE MOMENT DE FORCE

10.1 Solution : Calcul du moment de force retour à la question ▲

a) τ_1 = 5,00 N·m, τ_2 = -2,50 N·m, τ_3 = -2,50 N·m, τ_4 = -4,00 N·m, τ_5 = 6,36 N·m

τ_1 :



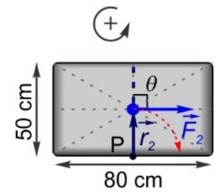
L'équation du moment de force est $\tau = \pm rF\sin\theta_{rF}$. On doit évaluer chaque paramètre :

- Le signe du moment de force est défini par le sens de rotation que la force $\vec{F}_1$. Selon la flèche rouge (en pointillé), on constate que $\vec{F}_1$ tente d'induire une rotation antihoraire, donc positive selon la référence illustrée;
- Le rayon d'action de la force est la hauteur de la plaque, donc r = 50 cm;
- La force a un module de 10 N;
- L'angle entre $\vec{r}_1$ et $\vec{F}_1$ est un angle de 90°.

Donc :

$$\tau_1 = \pm r_1 F_1 \sin 90° \quad = \quad 0{,}5\,\text{m} \times 10\,\text{N} \times \sin 90° \quad = \quad 5{,}00\,\text{N}\cdot\text{m}$$

τ_2 :

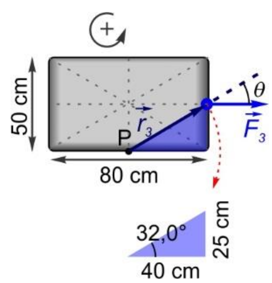


- Selon la flèche rouge, on constate que $\vec{F}_2$ tente d'induire une rotation horaire, donc négative selon la référence illustrée;
- Le rayon d'action de la force est la mi-hauteur de la plaque, donc r = 25 cm;
- La force a un module de 10 N;
- L'angle entre $\vec{r}_2$ et $\vec{F}_2$ est un angle de 90°.

Donc :

$$\tau_2 = -0{,}25\,\text{m} \times 10\,\text{N} \times \sin 90° \quad = \quad -2{,}50\,\text{N}\cdot\text{m}$$

τ_3 :



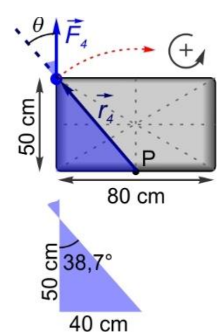
- Selon la flèche rouge, on constate que $\vec{F}_3$ tente d'induire une rotation horaire, donc négative selon la référence illustrée;
- Le rayon d'action de la force est l'hypoténuse du triangle bleu, dont la longueur est donnée par $r = \sqrt{(40\,\text{cm})^2 + (25\,\text{cm})^2} \quad = \quad 47{,}2\,\text{cm}$;
- La force a un module de 10 N;
- Déterminer l'angle entre $\vec{r}_3$ et $\vec{F}_3$ exige un calcul. À partir du triangle mis en évidence :

$$\theta = \tan^{-1}\frac{25\,\text{cm}}{40\,\text{cm}} = 32{,}0°.$$

Donc :

$$\tau_3 = -0{,}472\,\text{m} \times 10\,\text{N} \times \sin 32{,}0° \quad = \quad -2{,}50\,\text{N}\cdot\text{m}$$

τ_4 :



- Selon la flèche rouge, on constate que $\vec{F}_4$ tente d'induire une rotation horaire, donc négative selon la référence illustrée;
- Le rayon d'action de la force est l'hypoténuse du triangle bleu, dont la longueur est donnée par $r = \sqrt{(40\,\text{cm})^2 + (50\,\text{cm})^2} \quad = \quad 64{,}0\,\text{cm}$;
- L'angle entre $\vec{r}_4$ et $\vec{F}_4$ est défini identique à celui au sommet du triangle ci-contre :

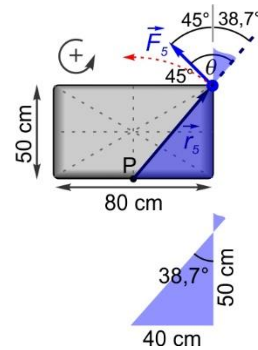
$$\theta = \tan^{-1}\frac{40\,\text{cm}}{50\,\text{cm}} \quad = \quad 38{,}7°.$$

Donc :

1 à 8 9 à 14

$$\tau_4 = -0{,}640\,\mathrm{m} \times 10\,\mathrm{N} \times \sin 38{,}7° \;=\; -4{,}00\,\mathrm{N\cdot m}$$

τ_5 :



- Selon la flèche rouge, on constate que $\vec{F}_5$ tente d'induire une rotation antihoraire, donc positive selon la référence illustrée;
- Le rayon d'action de la force est l'hypoténuse du triangle bleu, dont la longueur est donnée par $r = \sqrt{(40\,\mathrm{cm})^2 + (50\,\mathrm{cm})^2} \;=\; 64{,}0\,\mathrm{cm}$;
- La force a un module de 10 N;
- L'angle entre $\vec{r}_5$ et $\vec{F}_5$ demande quelques calculs. Par un calcul sur le triangle mis en évidence, on trouve que l'angle recherché est la somme de 45° et 38,7°, c'est-à-dire 83,7°.

Donc :

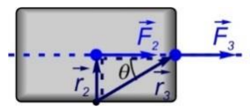
$$\tau_5 = 0{,}640\,\mathrm{m} \times 10\,\mathrm{N} \times \sin 83{,}7° \;=\; 6{,}36\,\mathrm{N\cdot m}$$

b) Vrai

On a déjà constaté que les moments de force τ_2 et τ_3 sont égaux. Si on compare les équations de ces moments de force, on a :

$$\tau_2 = -\underline{0{,}25\,\mathrm{m}} \times 10\,\mathrm{N} \times \underline{\sin 90°} \;=\; -2{,}50\,\mathrm{N\cdot m}$$

$$\tau_3 = -\underline{0{,}472\,\mathrm{m}} \times 10\,\mathrm{N} \times \underline{\sin 32{,}0°} \;=\; -2{,}50\,\mathrm{N\cdot m}$$



On peut réduire l'égalité à « $0{,}25\,\mathrm{m} \times \sin 90° \;=\; 0{,}472\,\mathrm{m} \times \sin 32{,}0°$ ».

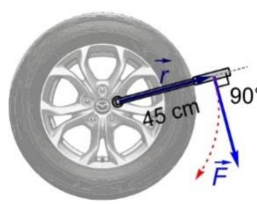
Dans les deux cas, le terme calculé correspond à la composante de $\vec{r}$ perpendiculaire à la force. Ainsi, toute force de 10 N située sur la même « ligne de force » impliquera une distance $\vec{r}$ dont la composante perpendiculaire à $\vec{F}$ a la même grandeur, soit 25 cm dans ce cas-ci.

10.2 Solution : La crevaison retour à la question ▲

F = 356 N

L'équation du moment de force est

$$\tau = \pm rF \sin\theta_{rF}$$



Si on ne s'intéresse qu'au module de la force requise, qu'on connait le rayon d'application de la force (0,45 m) et que cette force est appliquée perpendiculairement au rayon d'action, on peut trouver le module de la force par :

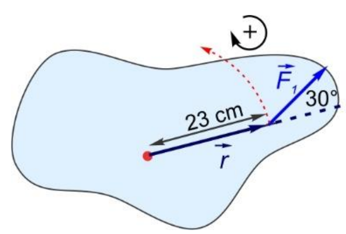
$$F = \frac{\tau}{r \sin\theta_{rF}} \;=\; \frac{160\,\mathrm{Nm}}{0{,}45\,\mathrm{m} \times \sin 90°} \;=\; 356\,\mathrm{N}$$

10.3 Solution : L'angle retour à la question ▲

a) F_1 = 130 N

Le module du moment de force τ_a, 15 N·m, est aussi donné par

$$\tau_a = rF_1 \sin\theta_{rF}$$



(Le signe du moment de force n'est pas utile pour déterminer le module de la force.)

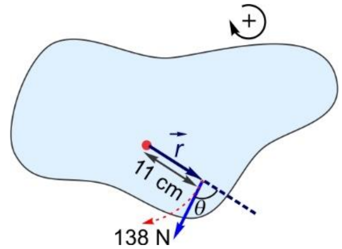
L'angle de 30° est directement l'angle entre $\vec{r}$ et $\vec{F}_1$. On peut donc calculer F_1 par :

$$F_1 = \frac{\tau_a}{r \sin\theta_{rF}} = \frac{15\,\mathrm{N\cdot m}}{0{,}23\,\mathrm{m} \times \sin 30°} \;=\; 130\,\mathrm{N}$$

1 à 8 9 à 14

b) θ = 81,2°

L'angle θ recherché est l'angle entre le vecteur $\vec{r}$ de 11 cm et le vecteur $\vec{F}$ de 138 N. À partir de l'équation du moment de force (ou on ne considérera que le module), on trouve :

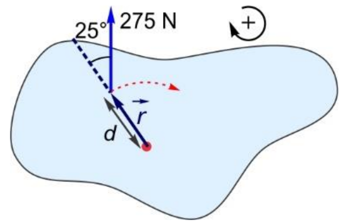


$$\tau_b = rF\sin\theta_{rF}$$

$$\theta = \sin^{-1}\frac{\tau_b}{rF} = \sin^{-1}\frac{15\,\mathrm{N\cdot m}}{0{,}11\,\mathrm{m}\times 138\,\mathrm{N}} = 81{,}2°$$

c) d = 12,9 cm

À partir de la force de 275 N et de l'angle de 25°, on peut trouver la distance d'application de la force par :



$$\tau_c = rF\sin\theta_{rF}$$

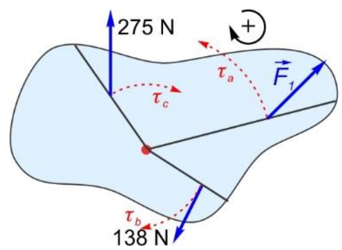
$$r = \frac{\tau_c}{F\sin\theta} = \frac{15\,\mathrm{N\cdot m}}{275\,\mathrm{N}\times\sin 25°} = 0{,}129\,\mathrm{m}$$

d) τ_{tot} = +15 N·m

Le moment de force total (ou résultant) est la somme des trois moments de force agissant sur le patatoïde :

$$\tau_{tot} = \tau_a + \tau_b + \tau_c$$

On connait le module des trois moments de force, mais on doit aussi attribuer un signe à chacun. On doit utiliser la référence du sens de rotation suggérée sur la figure, selon laquelle le sens horaire est positif.



La force F_1 tente d'induire une rotation en sens antihoraire, donc en sens négatif : τ_a = −15 N·m.

Le force de 138 N tente d'induire une rotation en sens horaire, donc en sens positif : τ_a = +15 N·m.

Le force de 275 N tente d'induire une rotation en sens horaire, donc en sens positif : τ_a = +15 N·m.

Le moment de force total est donc :

$$\tau_{tot} = \tau_a + \tau_b + \tau_c = -15\,\mathrm{N\cdot m} + 15\,\mathrm{N\cdot m} + 15\,\mathrm{N\cdot m} = +15\,\mathrm{N\cdot m}$$

10.4 Solution : Signe du moment de force

10.5 Solution : Le mobile

retour à la question ▲

a) Faux

Si les deux masses du mobile sont en équilibre de part et d'autre (en négligeant la masse de la tige), cela signifie qu'elles appliquent sur la tige des moments de force de même module, mais en sens contraires. Selon l'équation du moment de force :

$$\tau = \pm rF\sin\theta_{rF}$$

Pour une même valeur du moment de force, la distance r et la force F doivent varier inversement (pour un même angle d'application).

Si les moments de force des poids de la pieuvre et de la tortue sont égaux, une distance plus faible doit impliquer une force plus grande, dont une masse plus grande. La masse de la tortue doit donc être plus grande pour présenter le même moment avec une distance d'application plus courte.

b) m = 41,3 g

Les deux forces sont appliquées perpendiculairement à la tige, donc à 90° du rayon d'application. En nommant $\tau_{pieuvre}$ et τ_{tortue} les deux moments de force impliqués, on peut écrire ainsi l'égalité des modules des deux moments de force :

$$\tau_{pieuvre} = \tau_{tortue}$$

$$r_{pieuvre}F_{pieuvre}\sin 90° = r_{tortue}F_{tortue}\sin 90°$$

1 à 8 9 à 14

En développant les forces (des poids), par des produits mg :

$$r_{pieuvre} m_{pieuvre} g \sin 90° = r_{tortue} m_{tortue} g \sin 90°$$

On peut alors isoler la masse inconnue :

$$m_{tortue} = \frac{r_{pieuvre} m_{pieuvre}}{r_{tortue}} = \frac{25\ \text{cm} \times 33{,}0\ \text{g}}{20\ \text{cm}} = 41{,}25\ \text{g}$$

10.6 Solution : Le bocal retour à la question ▲

a) μ_s = 0,338

L'ouverture du bocal exige un moment de force total de 3,50 N·m, et provient de deux moments de force identiques générés par les forces de frottement statique appliquées de part et d'autre du couvercle (nommons-les τ_1 et τ_2). On peut donc écrire :

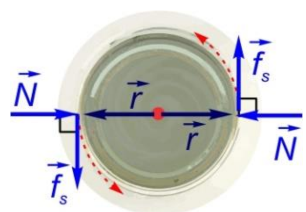
$$\tau_{tot} = \tau_1 + \tau_2$$

Les deux moments de force agissent dans le même sens et tentent de produire une rotation en sens antihoraire, par rapport au centre du couvercle. Puisqu'ils sont identiques, on peut donc les réunir en un seul terme, désigné par le moment de force de la force de frottement τ_f :

$$\tau_{tot} = 2\tau_f$$

Chacun des moments de force τ_f, alors que la force de frottement statique est perpendiculaire au rayon d'action, peut s'exprimer par :

$$\tau_f = r f_s \sin 90° = r f_s$$



Si on cherche le coefficient de frottement statique minimal permettant la rotation, on doit considérer qu'on est à la limite du glissement, et donc que $f_s = f_{s-\max} = \mu_s N$. Le moment de force du frottement devient donc :

$$\tau_f = r\mu_s N ,$$

et l'équation du moment de force total permettra de calculer μ_s à partir des deux forces normales de 115 N appliquées :

$$\tau_{tot} = 2\tau_f = 2r\mu_s N$$

$$\mu_s = \frac{\tau_{tot}}{2rN} = \frac{3{,}50\ \text{N}\cdot\text{m}}{2 \times 0{,}045\ \text{m} \times 115\ \text{N}} = 0{,}338$$

b) Vrai

L'équation finale développée en a) permet d'obtenir une équation de la force normale en fonction du coefficient de frottement statique :

$$\mu_s = \frac{\tau_{tot}}{2rN} \quad \Rightarrow \quad N = \frac{\tau_{tot}}{2r\mu_s}$$

On y voit qu'une valeur plus élevée de μ_s entraîne une valeur plus faible de N, pour un même moment de force total appliqué.

10.2 LA 2^E LOI DE NEWTON EN ROTATION

10.7 Solution : Le rouleau retour à la question ▲

a) α = 0,821 rad/s²

Selon la 2^e loi de Newton en rotation, pour le rouleau :

$$\sum \tau = I\alpha$$

La tension T est la seule force agissant sur le rouleau, donc :

$$\sum \tau = I\alpha = \tau_T ,$$

d'où :

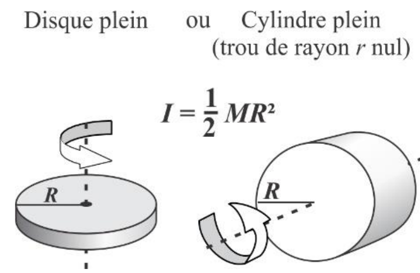
$$\alpha = \frac{\tau_T}{I}$$

Le moment de force de la tension s'exprime par :

$$\tau = \pm rF\sin\theta_{rF}$$

avec θ = 90° pour une corde enroulée. Aussi, considérons que le moment de force de la tension est positif, pour ne trouver que le module de l'accélération angulaire :

$$\tau_T = rT$$



Aussi, le moment d'inertie d'un cylindre plein tournant autour de son axe, selon le tableau des moments d'inertie, est : $I = ½MR^2$. L'accélération angulaire peut maintenant être calculée :

$$\alpha = \frac{\tau_T}{I} = \frac{rT}{\frac{1}{2}Mr^2} = \frac{2T}{Mr} = \frac{2\times 120\,\text{N}}{325\,\text{kg}\times 0{,}900\,\text{m}} = 0{,}821\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

b) Faux

L'équation finale obtenue en a) donne la relation entre l'accélération angulaire α et la tension T :

$$\alpha = \frac{2T}{Mr}.$$

On y voit que l'accélération angulaire varie linéairement avec la tension. Ainsi, une tension deux fois plus grande entraînera une accélération angulaire deux fois plus grande seulement.

10.8 Solution : La comparaison

retour à la question ▲

a) $I_4 < I_2 = I_3 < I_1$

L'évaluation la plus rapide des moments d'inertie tient compte de la masse totale et son éloignement à l'axe de rotation.

Le disque 1 étant équivalent à un assemblage des disque 2 et 4, sa masse est nécessairement équivalente à la somme des masses m_2 et m_4, et son moment d'inertie est également nécessairement équivalent à la somme des moments d'inertie I_2 et I_4, et c'est donc le plus élevé des quatre moments d'inertie.

Aussi, de toute évidence, les disques 2 et 3 sont identiques, donc $I_2 = I_3 < I_1$.

Finalement, le disque 4 est visiblement plus léger que tous les autres, et sa masse plus petite est aussi plus rapprochée de l'axe, impliquant donc un moment d'inertie nécessairement plus petit que pour les autres disques, d'où :

$$I_4 < I_2 = I_3 < I_1$$

Pour une évaluation plus rigoureuse des valeurs de moments d'inertie, voir la question suivante, 10.9 c).

b) $\tau_4 = \tau_2 < \tau_3 = \tau_1$

Le moment de force est défini par : $\tau = \pm rF\sin\theta_{rF}$.

Si on ne se préoccupe que du module et qu'on sait que dans les quatre cas la force est appliquée perpendiculairement au rayon d'application, on peut utiliser : $\tau = rF$.

Puisque le module de la force est le même dans les quatre cas, l'ordre des moments de force se résume à l'ordre des rayons d'application r. Puisque $r_4 = r_2 < r_3 = r_1$, on aura :

$$\tau_4 = \tau_2 < \tau_3 = \tau_1.$$

10.9 Solution : La comparaison II

retour à la question ▲

a) $m_2/m_4 = 3$

Si les masses volumiques et les épaisseurs des deux disques sont identiques, le rapport de leurs masses se réduit au rapport de leurs superficies.

$$\frac{m_2}{m_4} = \frac{A_2}{A_4}$$

À partir des rayons indiqués, on peut développer l'expression des superficies, alors que la superficie du disque troué est donnée par la superficie d'un disque plein réduite de la superficie du trou de rayon r :

1 à 8 9 à 14

$$A_2 = \pi(2r)^2 - \pi r^2 \;=\; 3\pi r^2 \qquad \text{et} \qquad A_4 = \pi r^2$$

On peut finalement obtenir une expression finale du rapport des masses des deux disques :

$$\frac{m_2}{m_4} = \frac{A_2}{A_4} \;=\; \frac{3\pi r^2}{\pi r^2} \;=\; 3$$

b) $m_1 = 4\rho e\pi r^2$, $m_2 = m_3 = 3\rho e\pi r^2$, $m_4 = \rho e\pi r^2$

La masse de chaque disque est donnée par le produit de sa masse volumique et de son volume :

$$m = \rho V$$

Le volume de chaque disque peut s'exprimer par le produit de sa superficie et de son épaisseur :

$$V = eA$$

$$m = \rho eA$$

À partir des rayons indiqués, on peut développer l'expression des superficies. On a établi en a) que la superficie d'un disque troué (disques 2 et 3) est donnée par la superficie d'un disque plein réduite de la superficie du trou de rayon r. Donc :

$$A_1 = \pi(2r)^2 \;=\; 4\pi r^2 \qquad A_2 = A_3 \;=\; \pi(2r)^2 - \pi r^2 \;=\; 3\pi r^2 \qquad A_4 = \pi r^2$$

On peut finalement obtenir une expression de la masses de chaque disque :

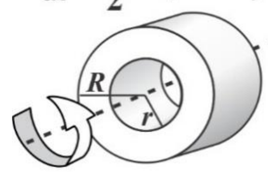
$$m_1 = \rho e A_1 \;=\; \rho e \times 4\pi r^2 \;=\; 4\rho e\pi r^2$$

$$m_2 = m_3 \;=\; \rho e A_2 \;=\; \rho e \times 3\pi r^2 \;=\; 3\rho e\pi r^2$$

$$m_4 = \rho e A_4 \;=\; \rho e \times \pi r^2 \;=\; \rho e\pi r^2$$

c) $I_1 = 8zr^2$, $I_2 = I_3 = \frac{15}{2}zr^2$, $I_4 = \frac{1}{2}zr^2$,

On peut voir les quatre disques comme des cylindres troués (un cylindre plein est un cylindre troué avec un trou de rayon nul). Leur moment d'inertie est donné par l'équation générale $I = ½M(R^2+r^2)$.



On peut utiliser l'expression des masses développées en b).

Pour le disque 1, en utilisant l'équivalence $\rho e\pi r^2 = z$:

$$I_1 = \tfrac{1}{2}M\left(R^2+r^2\right) \;=\; \tfrac{1}{2}m_1\left((2r)^2+0^2\right) \;=\; \tfrac{1}{2}\left(4\rho e\pi r^2\right)\times\left(4r^2\right) \;=\; 8\rho e\pi r^4 \;=\; 8zr^2$$

Pour les disques 2 et 3 identiques :

$$I_2 = \tfrac{1}{2}M\left(R^2+r^2\right) \;=\; \tfrac{1}{2}m_2\left((2r)^2+r^2\right) \;=\; \tfrac{1}{2}\left(3\rho e\pi r^2\right)\times\left(5r^2\right) \;=\; \tfrac{15}{2}\rho e\pi r^4 \;=\; \tfrac{15}{2}zr^2$$

Pour le disque 4 :

$$I_4 = \tfrac{1}{2}M\left(R^2+r^2\right) \;=\; \tfrac{1}{2}m_4\left(r^2+0^2\right) \;=\; \tfrac{1}{2}\left(\rho e\pi r^2\right)\times\left(r^2\right) \;=\; \tfrac{1}{2}\rho e\pi r^4 \;=\; \tfrac{1}{2}zr^2$$

d) $\alpha_1 = \frac{F}{4zr}$, $\alpha_2 = \frac{2F}{15zr}$, $\alpha_3 = \frac{4F}{15zr}$, $\alpha_4 = \frac{2F}{zr}$,

L'accélération angulaire des disques est liée à la 2e loi de Newton en rotation : $\sum\tau = I\alpha$. Donc, pour chaque disque soumis à une seule force, donc un seul moment de force :

$$\alpha = \frac{\tau}{I}.$$

Le moment de force, défini par $\tau = \pm rF\sin\theta_{rF}$, se réduit à $\tau = rF$ lorsque les forces sont perpendiculaires aux rayons d'application et lorsqu'on ne s'intéresse qu'au module des accélérations. Aussi, on utilisera les expressions des moments d'inertie développées en c).

Pour le disque 1 sur lequel la force F est appliquée à une distance $2r$ de l'axe de rotation :

1 à 8 9 à 14

$$\alpha_1 = \frac{\tau_1}{I_1} = \frac{(2r)F}{8zr^2} = \frac{F}{4zr}$$

Pour le disque 2 sur lequel la force *F* est appliquée à une distance *r* de l'axe de rotation :

$$\alpha_2 = \frac{\tau_2}{I_2} = \frac{rF}{\frac{15}{2}zr^2} = \frac{2F}{15zr}$$

Pour le disque 3 sur lequel la force *F* est appliquée à une distance 2*r* de l'axe de rotation :

$$\alpha_3 = \frac{\tau_3}{I_3} = \frac{(2r)F}{\frac{15}{2}zr^2} = \frac{4F}{15zr}$$

Et pour le disque 4 sur lequel la force *F* est appliquée à une distance *r* de l'axe de rotation :

$$\alpha_4 = \frac{\tau_4}{I_4} = \frac{rF}{\frac{1}{2}zr^2} = \frac{2F}{zr}$$

e) $\alpha_2 < \alpha_1 < \alpha_3 < \alpha_4$

À partir des quatre expressions d'accélération angulaire trouvées en d), on a :

$$\frac{2F}{15zr} < \frac{F}{4zr} < \frac{4F}{15zr} < \frac{2F}{zr}$$

$$\alpha_2 < \alpha_1 < \alpha_3 < \alpha_4$$

10.10 Solution : Le manège

retour à la question ▲

a) τ = 195 N·m

Selon la 2e loi de Newton en rotation, pour un système subissant un seul moment de force (moment de force du moteur) :

$$\sum \tau = I\alpha \qquad (1)$$

Pour le manège, on peut calculer l'accélération angulaire par cinématique à partir de la variation de vitesse angulaire et du délai d'accélération. Puisque la vitesse angulaire initiale est nulle :

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{\omega}{t} \qquad (2)$$

À partir des équations (1) et (2) :

$$\tau = I\alpha = \frac{I\omega}{t} = \frac{6500\,\mathrm{kg \cdot m^2} \times 0{,}900\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}}{30\,\mathrm{s}} = 195\,\mathrm{N \cdot m}$$

b) τ_f = 25,0 N·m

Si un frottement agit durant l'accélération du manège, on doit comprendre que le moment de force trouvé en a) est la somme du moment de force du moteur, τ_M, et du moment de la force de frottement, τ_f. L'équation de la 2e loi de Newton peut alors s'écrire :

$$\sum \tau = I\alpha = \tau_M + \tau_f = 195\,\mathrm{N \cdot m}$$

Si on connait le moment de force du moteur τ_M = 220 N·m, alors on peut isoler et calculer le moment de force du frottement :

$$\tau_f = 195\,\mathrm{N \cdot m} - \tau_M = 195\,\mathrm{N \cdot m} - 220\,\mathrm{N \cdot m} = -25\,\mathrm{N \cdot m}$$

Ce moment de force est négatif car il s'oppose à celui du moteur. Son module est 25,0 N·m.

c) t = 234 s

Si le moteur s'arrête, seul le frottement appliquera un moment de force sur le manège. Son moment de force négatif produira une accélération angulaire négative qui immobilisera le manège, selon l'équation de la 2e loi de Newton en rotation :

[1 à 8](#) [9 à 14](#)

$$\sum \tau = I\alpha = \tau_f \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{\tau_f}{I}$$

Cette accélération angulaire mettra un temps t à réduire la vitesse angulaire de 0,900 rad/s jusqu'à l'arrêt complet, selon l'équation de cinématique :

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{t} = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{-\omega_0}{t} \quad \rightarrow \quad t = \frac{-\omega_0}{\alpha}$$

En réunissant les deux équations :

$$t = \frac{-\omega_0}{\left(\frac{\tau_f}{I}\right)} = \frac{-\omega_0 I}{\tau_f} = \frac{-0{,}900\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \times 6500\ \text{kg}\cdot\text{m}^2}{-25{,}0\ \text{N}\cdot\text{m}} = 234\ \text{s}$$

10.11 Solution : La poulie

[retour à la question ▲](#)

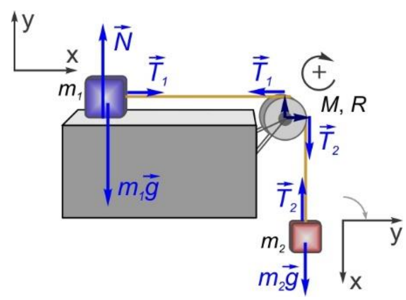
a) α = 15,3 rad/s²

On rédige pour les masses m_1 et m_2 qui se déplacent les équations de la somme des forces :

m_1 : $\sum \vec{F} = m_1\vec{a}_1 = \vec{T}_1 + \vec{N} + m_1\vec{g}$

$$\sum F_x = m_1 a_{1x} = T_1 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = m_1 \underbrace{a_{1y}}_{=0} = N - m_1 g = 0$$



m_2 : $\sum \vec{F} = m_2\vec{a}_2 = \vec{T}_1 + m_2\vec{g}$

$$\sum F_x = m_2 a_{2x} = m_2 g - T_2 \qquad (2)$$

On rédige pour la poulie qui tourne l'équation de la somme des moments de force. Sur la poulie, on peut ne considérer que les moments de force des tensions $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$ (τ_1 et τ_2), car la force gravitationnelle et la force de l'essieu de la poulie ont des moments de force nuls sur elle (forces appliquées sur l'axe) :

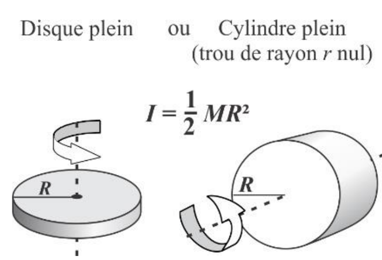
M : $\sum \tau = I\alpha = \tau_1 + \tau_2$

Les moments de force τ_1 et τ_2 peuvent s'exprimer en fonction des forces $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$, du rayon R de la poulie. Les tensions agissant perpendiculairement au rayon d'application, les angles impliqués sont de 90° pour les deux moments de force. Aussi, on utilisera le sens horaire comme sens positif pour être cohérent avec l'accélération attendue pour les masses (vers la gauche et vers le bas) :

$$\tau_1 = -RT_1 \sin 90° = -RT_1 \qquad \text{et} \qquad \tau_2 = RT_2 \sin 90° = RT_2$$

L'équation des moments de force devient :

$$I\alpha = -RT_1 + RT_2 \qquad (3)$$



Le déplacement des masses et la rotation de la poulie sont liés par :

$$a = \alpha R \qquad (4)$$

Si on considère la poulie comme un cylindre plein, son moment d'inertie est :

$$I = \tfrac{1}{2} MR^2 \qquad (5)$$

Pour trouver d'abord l'accélération angulaire α, on peut substituer l'accélération a dans les équations (1) et (2) par αR, avant de substituer dans l'équation (5) les nouvelles expressions de T_1 et T_2 :

(1) $T_1 = m_1 \alpha R$

(2) $T_2 = m_2 g - m_2 \alpha R$ (6)

(5) $\tfrac{1}{2} MR^2 \times \alpha = -R(m_1 \alpha R) + R(m_2 g - m_2 \alpha R)$

1 à 8 9 à 14

$$\tfrac{1}{2}MR\times\alpha \;=\; -m_1\alpha R+m_2g-m_2\alpha R$$

$$\alpha=\frac{m_2g}{R\left(m_1+m_2+\frac{1}{2}M\right)} \qquad (7)$$

$$\alpha=\frac{0{,}700\,\text{kg}\times 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0{,}15\text{m}\times\left(2\,\text{kg}\;+\;0{,}700\,\text{kg}\;+\;\frac{1}{2}\times 0{,}600\,\text{kg}\right)} \;=\; 15{,}26\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

b) T_2 = 5,26 N

Ayant trouvé l'accélération angulaire, on peut utiliser l'équation (6) développée en a) pour calculer la tension T_2 dans la portion verticale :

$$(6) \qquad T_2=m_2g-m_2\alpha R \;=\; m_2\left(g-\alpha R\right) \;=\; 0{,}700\,\text{kg}\times\left(9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}-15{,}26\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}^2}\times 0{,}15\,\text{m}\right) \;=\; 5{,}26\,\text{N}$$

c) Vrai

Si on réunit les équations (6) et (7) trouvées en a), on peut obtenir une équation de la tension T_2 en fonction entre autres de la masse M :

$$T_2=m_2g-m_2\alpha R \qquad \text{avec} \qquad \alpha=\frac{m_2g}{R\left(m_1+m_2+\frac{1}{2}M\right)}$$

$$T_2=m_2g-m_2\left(\frac{m_2g}{R\left(m_1+m_2+\frac{1}{2}M\right)}\right)R$$

$$T_2=m_2g\left(1-\frac{m_2}{\left(m_1+m_2+\frac{1}{2}M\right)}\right)$$

Cette dernière expression montre le rôle de M dans la valeur de T_2 : Une augmentation de M entraînera une légère augmentation de la tension T_2 (M se trouve au dénominateur dans un terme négatif contribuant à la valeur de T_2).

10.12 Solution : Le rouleau II

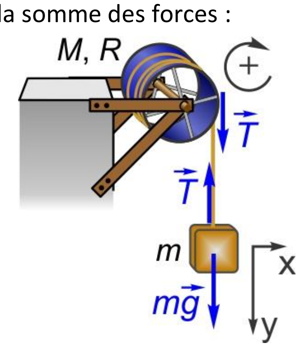
retour à la question ▲

M = 198 g

On rédige, pour la masse suspendue (disons m) qui se déplace, l'équation de la somme des forces :

$$m:\;\sum\vec{F}=m\vec{a}=\vec{T}+m\vec{g}$$

$$\sum F_y=ma=mg-T \qquad (1)$$



On rédige pour le rouleau qui tourne l'équation de la somme des moments de force. On peut ne considérer que le moment de force de la tension $\vec{T}$ car la force gravitationnelle et la force de l'essieu du rouleau ont des moments de force nuls sur lui (forces appliquées sur l'axe) :

$$M:\;\sum\tau=I\alpha=\tau_T$$

Le moments de force τ_T peut s'exprimer en fonction de la forces $\vec{T}$ et du rayon R du rouleau. Le tension agissant perpendiculairement au rayon d'application, l'angle impliqué est de 90°. Aussi, on utilisera le sens horaire comme sens positif pour être cohérent avec l'accélération attendue pour la masse (vers le bas) :

$$\tau_T=RT\sin 90^\circ \;=\; RT$$

L'équation des moments de force devient :

$$I\alpha=RT \qquad (2)$$

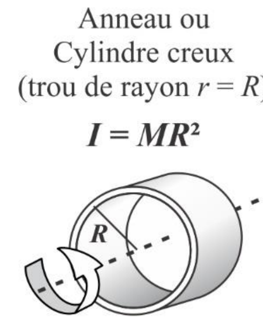
Le déplacement de la masse et la rotation du rouleau sont liés par :

$$a=\alpha R \qquad (3)$$

1 à 8 9 à 14

Si on considère le rouleau comme un cylindre creux, son moment d'inertie est :

$$I = MR^2 \qquad (4)$$



On cherche la masse du cylindre M, et on connait la masse m, et l'accélération a. On assemble donc les équations (1) à (4) de manière à faire disparaître α, T, et I :

(1) $$T = mg - ma$$

(3) $$\alpha = \frac{a}{R}$$

(2) $$MR^2 \times \frac{a}{R} = R\left(mg - ma\right)$$

$$Ma = mg - ma$$

$$M = m\left(\frac{g}{a} - 1\right) = 25\,\text{g} \times \left(\frac{9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1{,}10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} - 1\right) = 198\,\text{g}$$

10.13 Solution : Le puits

retour à la question ▲

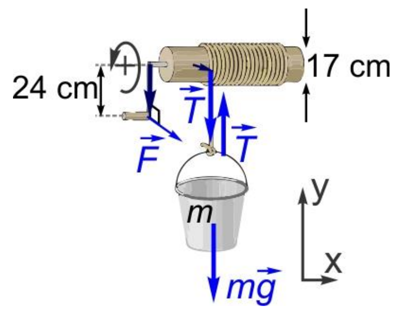
a) F = 24,3 N

En a), l'accélération est nulle, mais traitons le problème sans faire disparaître la variable d'accélération a, ainsi on trouvera une expression algébrique qui sera utilisable en b) pour le cas où l'accélération n'est pas nulle.

Un objet se déplace, la chaudière (disons m); pour elle, on applique l'équation de la somme des forces :

$$m: \sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g}$$

$$\sum F_y = ma = T - mg \qquad (1)$$



On rédige pour le cylindre qui tourne l'équation de la somme des moments de force. Deux forces agissent sur le cylindre de manière à produire des moments de force : la force sur la manivelle, τ_F, et la tension de la corde qui porte la chaudière τ_T.

$$M: \sum \tau = I\alpha = \tau_F + \tau_T \qquad (2)$$

Considérons positive une accélération de la chaudière vers le haut. Considérons donc positif le sens de rotation du cylindre faisant en sorte que la chaudière remonte. Le moment de la force sur la manivelle est donc positif, et le moment de la force de tension sera négatif.

En appelant R le rayon de 8,5 cm du cylindre et L la longueur du bras de la manivelle, le moments de force de la force $\vec{F}$ sur la manivelle, appliquée perpendiculairement au rayon d'action, peut s'exprimer par :

$$\tau_F = +LF\sin 90° = LF$$

Le moment de force de la tension $\vec{T}$ sera :

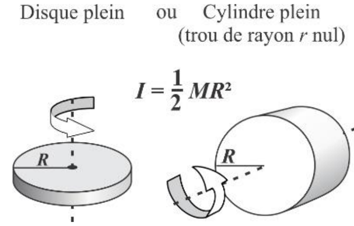
$$\tau_T = -RT\sin 90° = -RT$$

En intégrant ces deux expressions de moments de force dans l'équation (2) :

$$I\alpha = \tau_F + \tau_T = LF - RT \qquad (3)$$

L'accélération de la chaudière et l'accélération angulaire du cylindre sont liées par :

$$a = \alpha R \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{a}{R} \qquad (4)$$



Si on considère le cylindre plein où la corde s'enroule comme un cylindre plein, son moment d'inertie est :

$$I = \tfrac{1}{2}MR^2 \qquad (5)$$

En substituant dans l'équation (3) les valeurs de T, α et I, on obtient :

1 à 8 9 à 14

$$\tfrac{1}{2}MR^2 \times \frac{a}{R} = LF - R\left(mg + ma\right)$$

On peut isoler la force F pour permettre le calcul, en fonction entre autres de l'accélération a de la chaudière :

$$F = \frac{R}{L}\left(mg + \left(\tfrac{1}{2}M + m\right)a\right) \qquad (6)$$

Si l'accélération est nulle dans le scénario a), la force sera :

$$F = \frac{R}{L}\left(mg + \left(\tfrac{1}{2}M + m\right)\times 0\right) = \frac{R}{L}\times mg = \frac{0{,}085\,\mathrm{m}}{0{,}24\,\mathrm{m}}\times 7\,\mathrm{kg}\times 9{,}81\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 24{,}3\,\mathrm{N}$$

b) F = 27,8 N

On peut reprendre l'équation (6) avec la nouvelle valeur d'accélération (non nulle) :

$$F = \frac{R}{L}\left(mg + \left(\tfrac{1}{2}M + m\right)a\right)$$

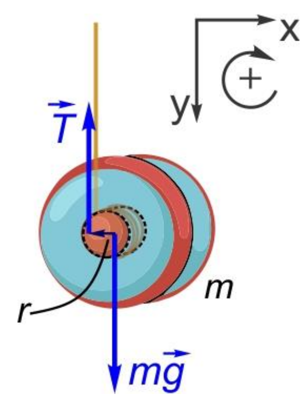
$$F = \frac{0{,}085\,\mathrm{m}}{0{,}24\,\mathrm{m}}\times\left(7\,\mathrm{kg}\times 9{,}81\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + \left(\tfrac{1}{2}\times 2{,}5\,\mathrm{kg} + 7\,\mathrm{kg}\right)\times 1{,}20\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = 27{,}8\,\mathrm{N}$$

10.14 Solution : Le yoyo

retour à la question ▲

a) a = 0,260 m/s²

Le yoyo se déplace et tourne durant sa chute. On rédigera pour lui les équations de la somme des forces et de la somme des moments de force (en considérant que l'axe de rotation passe par le centre du yoyo) :



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$$

$$\sum F_y = ma = mg - T \qquad (1)$$

$$\sum \tau = I\alpha = \tau_T + \tau_g$$

Puisque l'axe considéré passe par le centre du yoyo, le moment de la force gravitationnelle (appliquée au centre) est nul. Le moment de la force de tension, appliquée perpendiculairement au cylindre (de rayon r) où s'enroule la corde, peut s'exprimer par :

$$\tau_T = +rT\sin 90° = rT$$

L'équation des moments de force devient :

$$I\alpha = rT \qquad (2)$$

L'accélération de la chaudière et l'accélération angulaire du cylindre sont liées par :

$$a = \alpha r \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{a}{r} \qquad (3)$$

En isolant T dans l'équation (1), on pourra substituer T et α dans l'équation (2) :

(1) $$T = mg - ma$$

(2) $$I\frac{a}{R} = r\left(mg - ma\right)$$

On peut finalement isoler l'accélération a pour la calculer :

$$a = \frac{mg}{m + \dfrac{I}{r^2}} = \frac{0{,}200\,\mathrm{kg}\times 9{,}81\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{0{,}200\,\mathrm{kg} + \dfrac{3{,}6\times 10^{-4}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}{\left(0{,}007\,\mathrm{m}\right)^2}} = 0{,}260\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

b) t = 5,82 s

1 à 8 9 à 14

Cent rotations est le déplacement angulaire du yoyo, à partir d'une vitesse angulaire initiale $\omega_0 = 0$:

$$\Delta\theta = 100\ \text{tr} \times \frac{2\pi\ \text{rad}}{\text{tr}} \quad = \quad 200\pi\ \text{rad}$$

La durée de la rotation se trouvera par cinématique si on peut connaître l'accélération angulaire. Cette accélération angulaire est liée à l'accélération linéaire trouvée en a) par l'équation (3) :

$$\alpha = \frac{a}{r}$$

Les paramètres cinématiques du mouvement de rotation sont :

$$\theta_0 = 0$$
$$\theta = 200\pi\ \text{rad}$$
$$\omega_0 = 0$$
$$\omega = ?$$
$$\alpha = \tfrac{a}{r}$$
$$t = ??$$

L'équation dans laquelle *t* est alors la seule inconnue est :

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \quad = \quad \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{a}{r}\right)t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2r\theta}{a}} \quad = \quad \sqrt{\frac{2 \times 0{,}007\ \text{m} \times 200\pi\ \text{rad}}{0{,}260\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \quad = \quad 5{,}82\ \text{s}$$