CH 7 ÉNERGIE, TRAVAIL ET PRINCIPE DE CONSERVATION

CONSTANTES UTILES

$g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$

$G = 6{,}674\times10^{-11}\ \text{N·m}^2/\text{kg}^2$

1 Cal = 4184 J

ÉQUATIONS LIÉES AU CHAPITRE :

$$\boxed{K = \tfrac{1}{2}mv^2} \qquad \boxed{U_g = mgy}$$

$$\boxed{E = K + U} \qquad \boxed{E_f = E_i + W_{nc}}$$

$$\boxed{U_é = \tfrac{1}{2}kx^2} \qquad \boxed{W = \vec{F} \bullet \vec{\Delta r}}$$

$$\boxed{\vec{F}_{él} = -kx\vec{i}} \qquad \boxed{W_{él} = -\tfrac{1}{2}k\left(x^2 - x_0^2\right)}$$

$$\boxed{\sum W = \Delta K} \qquad \boxed{\overline{P} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta t}}$$

$$\boxed{\overline{P} = \vec{F} \bullet \vec{v}}$$

$$W = F \cdot \Delta r \cdot \cos\theta_{F\Delta r} = F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z$$

À moins d'avis contraire, négligez dans tous les exercices la résistance de l'air et le frottement dans les poulies.

7.1 L'ÉNERGIE CINÉTIQUE (DE TRANSLATION)

7.1 Exercices : La balle de revolver solution ►

Soit une balle de revolver de 9,50 g se déplaçant à 425 m/s.

a) Quelle est son énergie cinétique?
b) Quelle masse devrait avoir un caillou qu'on lance à 30 m/s pour avoir la même énergie cinétique?
c) Quelle vitesse devrait avoir une boule de quille de 4 kg pour avoir la même énergie cinétique?

7.2 Exercices : Variation d'énergie cinétique solution ►

Une masse de 200 g se déplaçant initialement à 2,50 m/s se déplace en ligne droite de $\vec{r}_0 = (19\,\vec{i} - 5\,\vec{j}\,)$ m à une position finale $\vec{r} = (13{,}5\,\vec{i} + 4\,\vec{j}\,)$ m, en 1,45 s et avec une accélération constante. Quelle est la variation d'énergie cinétique de cette masse?

7.3 Exercice : Le pourcentage d'augmentation solution ►

À un certain instant, une automobile de 1280 kg roule à 45 km/h et commence à accélérer jusqu'à 80 km/h. Quel est le pourcentage d'augmentation de son énergie cinétique?

7.2 L'ÉNERGIE POTENTIELLE GRAVITATIONNELLE (RELATIVE)

7.4 Exercices : Le Taipei 101 solution ►

L'édifice Taipei 101 à Taïwan comporte une boule d'acier de 660 tonnes au 89e étage (à 377 m du sol) pour le stabiliser lors de vents importants (amortisseur harmonique). Quel est l'énergie potentielle gravitationnelle de cette boule par rapport au niveau de la rue? (1 tonne = 1 000 kg)

7.5 Exercices : Le snowboard solution ►

En dévalant en snowboard une pente du Mont Sainte-Anne, Jonathan subit une perte d'énergie potentielle gravitationnelle de $4{,}17\times10^5$ J. Sa masse est de 68 kg. Quelle est la dénivellation subie par Jonathan?

7.6 Exercice : Mmmmh, chocolat! solution ►

Une barre de chocolat contient 149 Calories. Combien d'étages une personne de 60 kg pourrait-elle gravir dans des escaliers si elle parvenait à transformer toute cette énergie en énergie potentielle gravitationnelle et que chaque étage mesure 3,60 m de hauteur?

7.3 L'ÉNERGIE POTENTIELLE ÉLASTIQUE

7.7 Exercice : L'énergie emmagasinée solution ►

Déterminez l'énergie potentielle élastique emmagasinée par un ressort dont la constante de rappel est 25 N/m lorsque :

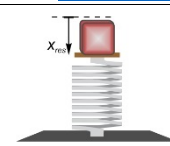
a) il est étiré de 0,20 m;
b) il est comprimé de 20 cm;
c) on y suspend verticalement, en équilibre, une masse de 800 g.

7.8 Exercice : Constante inconnue solution ►

Un ressort de constante de rappel inconnue s'étire de 18,5 cm quand on applique sur son extrémité libre une force de 52 N.

a) Quelle est l'énergie emmagasinée par le ressort?
b) Quel étirement subirait un autre ressort dont la constante de rappel serait deux fois plus grande tout en accumulant la même énergie?

7.9 Exercice : Le spring solution ►



Une masse de 200 g est déposée sur un ressort vertical ($k = 300$ N/m) et on la pousse vers le bas de manière à faire en sorte que le ressort est comprimé de 5 cm par rapport à sa position naturelle. Si on lâche la masse subitement, de quelle hauteur s'élèvera-t-elle au-dessus de son point de départ (là où la main la retient) si toute l'énergie potentielle élastique se transforme en énergie potentielle gravitationnelle?

7.10 Exercice : Doubler l'étirement solution ►

Un certain ressort dont la constante de rappel est *k* emmagasine 10 joules quand son étirement est *x*. Déterminez l'énergie qu'il emmagasine si on l'étire plutôt d'une distance 2*x*.

3.3 LE PRODUIT SCALAIRE

7.11 Exercice : Le produit scalaire I solution ►

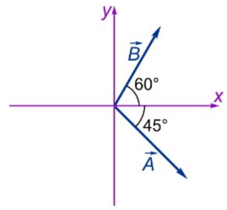
Effectuez le produit scalaire des vecteurs $\vec{R} = \left(2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}\right)$m et $\vec{S} = \left(-\vec{i} + 2\vec{k}\right)$m .

7.1- a) 858 J — b) 1,91 kg — c) 20,7 m/s — **7.2**- ΔK = 13,9 J — **7.3**- $\Delta\%$ = 216% — **7.4**- $2{,}44\times10^9$ J — **7.5**- Δy = -625 m — **7.6**- n = 294 ét. — **7.7**- a) $U_é$ = 0,500 J — b) $U_é$ = 0,500 J — c) $U_é$ = 1,23 J — **7.8**- a) $U_é$ = 4,81 J — b) x = 0,131 m — **7.9**- h = 0,191 m — **7.10**- $U_é$ = 40,0 J — **7.11**- −10,0 m² — **7.12**- −6,47 cm²

1 à 11   12 à 24   25 à 38   39 à 47

7.12 Exercice : Le produit scalaire II solution ▶

Les vecteurs sur la figure ci-contre ont tous deux un module de 5 cm. Déterminez leur produit scalaire.



7.13 Exercice : Le produit scalaire III solution ▶

Deux vecteurs ayant des modules identiques font un angle de 75° entre eux et leur produit scalaire vaut 42,5. Déterminez leur module.

7.14 Exercice : Le produit scalaire IV solution ▶

Sois les vecteurs $\vec{X}=\left(3\vec{i}-\vec{k}\right)$m, $\vec{Y}=\left(4\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}\right)$m et $\vec{Z}=\left(-3\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}\right)$. Déterminez :

a) $\left(\vec{X}\bullet\vec{Y}\right)\vec{Z}$
b) $\vec{X}+\vec{Y}\bullet\vec{Z}$
c) $\left(\vec{X}-\vec{Y}\right)\bullet\vec{Z}$

7.15 Exercice : L'angle solution ▶

Déterminez l'angle que forment entre eux les vecteurs $\vec{A}=\left(12\vec{i}-2\vec{j}\right)$m et $\vec{B}=\left(4\vec{\imath}+7\vec{k}\right)m$.

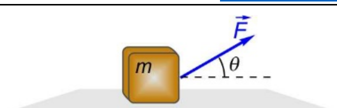
7.4 LE TRAVAIL

7.16 Exercice : Force unique solution ▶

Une boîte au sol est poussée avec une force de 250 N et elle se déplace dans la direction de la force. Quel travail cette force a-t-elle effectué lorsque la masse s'est déplacée de 6,5 m?

7.17 Exercice : Travailler vers la droite solution ▶

Une force *F* de 325 N et orientée à 25° au-dessus de l'horizontale provoque le déplacement vers la droite d'une masse de 55 kg. Le coefficient de frottement cinétique entre cette masse et le sol est de 0,355. Pour un déplacement de 7,5 m vers la droite, déterminez le travail de…



a) la force *F*;
b) la force gravitationnelle;
c) la force normale;
d) la force de frottement cinétique.

7.18 Exercice : L'ascenseur solution ▶

Dans un ascenseur se déplaçant vers le haut, un passager de 60 kg se rend au 5e étage. Durant la portion du déplacement où la vitesse est constante, il parcourt 14,7 m verticalement. Déterminez le travail :

a) de la force gravitationnelle;
b) de la force normale.

7.19 Exercice : Travail en 3D solution ▶

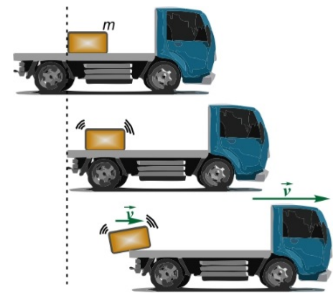
Dans un espace à trois dimensions, une masse de 1,2 kg subit une force définie par $\vec{F}$ =(12,5 $\vec{i}$ +9,2 $\vec{j}$ -10,8 $\vec{k}$) N. Sous l'effet de cette force et de quelques autres, la masse subit le déplacement suivant : $\Delta\vec{r}$ =(-5,5 $\vec{i}$ +10,9 $\vec{j}$ +2,0 $\vec{k}$) m. Quel est le travail de la force $\vec{F}$ durant ce déplacement?

7.20 Exercice : La montée solution ▶

Une personne pousse un chariot de 25 kg en montant une pente de 7,8°, à vitesse constante. Si aucun frottement n'agit sur le chariot et que la personne effectue un travail de 1 250 J, quelle distance parcourra le chariot le long de la pente si la personne pousse parallèlement à la surface de la pente?

7.21 Exercice : Le travail du frottement solution ▶

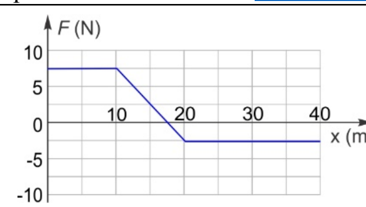
Une caisse déposée sur la plate-forme d'un camion glisse vers l'arrière du camion lorsque celui-ci accélère trop subitement vers l'avant. Elle finit par tomber à l'arrière du camion 3,5 s après le départ du camion. La caisse a une masse de 95 kg et elle a accéléré à 2,75 m/s² par rapport au sol jusqu'à ce qu'elle tombe.



a) Déterminez le travail de la force de frottement.
b) Le signe du travail du frottement est-il cohérent?
c) Déterminez le coefficient de frottement cinétique entre la caisse et la plate-forme.

7.22 Exercice : Le graphique solution ▶

Le graphique suivant montre le travail d'une force *F* agissant sur un corps se déplaçant le long d'un axe *x*. Déterminez le travail de la force *F* :



a) lors du déplacement de *x* = 0 à *x* = 10 m;
b) lors du déplacement de *x* = 10 m à *x* = 20 m;
c) lors du déplacement de *x* = 15 m à *x* = 5 m;
d) lors du déplacement de *x* = 20 m à *x* = 40 m;
e) lors du déplacement de *x* = 35 m à *x* = 25 m.

7.23 Exercice : Le ressort étiré solution ▶

Un ressort de 80 cm au repos et dont la constante de rappel est de 125 N/m est étiré jusqu'à une longueur totale de 142 cm. Quel travail le ressort a-t-il effectué durant ce mouvement?

7.5 LE THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE

7.24 Exercice : La catapulte solution ▶

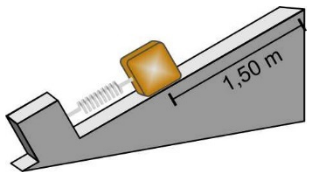
Une masse de 450 g sur une surface horizontale sans frottement est appuyée contre un ressort sans masse (*k* = 80 N/m) alors qu'on comprime le ressort de 25 cm.

a) Quel est le module de l'accélération de la masse à l'instant où on la relâche?
b) Quel est le module de l'accélération de la masse lorsque l'extrémité du ressort est à 10 cm de sa position au repos?
c) Quel est le module de la vitesse de la masse à l'instant où l'extrémité du ressort repasse à sa position au repos?

7.13- $A = B = 12,8$ — **7.14**- a) $(-27\vec{i}+45\vec{j}+9\vec{k})$ m² — b) −10,8 m — c) 4,00 m — **7.15**- $\theta = 60,7°$ — **7.16**- $W = 1\,625$ J — **7.17**- a) $W_F = 2\,209$ J — b) $W_g = 0$ J — c) $W_N = 0$ J — d) $W_f = -1\,071$ J — **7.18**- a) $W_g = -8\,652$ J — b) $W_N = 8\,652$ J — **7.19**- $W_F = 9,93$ J — **7.20**- $\Delta r = 37,6$ m — **7.21**- a) $W_f = 4\,400$ J — b) Oui — c) $\mu_c = 0,280$ — **7.22**- a) $W = 75$ J — b) $W = 25,0$ J — c) $W = -62,5$ J — d) $W = -50,0$ J — e) $W = 25,0$ J — **7.23**- $W_{res} = -24,0$ J — **7.24**- a) $a = 44,4$ m/s² — b) $a = 17,8$ m/s² — c) $v = 3,33$ m/s

1 à 11 12 à 24 25 à 38 39 à 47

7.25 Exercice : La rampe de lancement solution ▶



Un ressort comprimé est utilisé pour propulser une masse de 2 kg sur un plan incliné de 25°. Le ressort dont la constante de rappel est 450 N/m est comprimé initialement de 38 cm. Le coefficient de frottement entre la masse et la surface inclinée est μ_c = 0,210. La masse (non attachée au ressort) se trouve initialement à 1,50 m de l'extrémité supérieure du plan incliné. Si on relâche le système, quelle sera la vitesse de la masse en arrivant en haut du plan incliné?

7.26 Exercice : Accélérée par le travail solution ▶

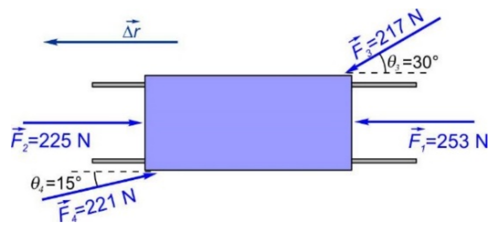
Une masse de 38 kg se déplaçant à 2,25 m/s subit une force résultante effectuant un travail total de 5 570 J en 25,0 s. À quelle vitesse sera propulsée la masse?

7.27 Exercice : Le conteneur solution ▶

Une grue portuaire soulève du sol un conteneur de 29,5 tonnes, immobile (1 t = 1 000 kg). Après l'avoir soulevé d'une certaine hauteur, le conteneur est déplacé horizontalement à 5,20 m/s vers le bateau sur lequel il doit être chargé. Quel est le travail total effectué sur le conteneur par les différentes forces durant l'ensemble du mouvement décrit?

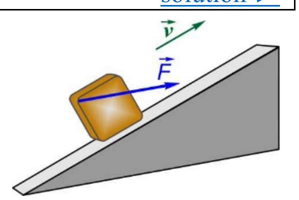
7.28 Exercice : Le plus fort solution ▶

Un chariot sur rail, initialement immobile et ayant une masse de 78 kg, peut se déplacer sans frottement le long du rail. Quatre personnes poussent sur ce chariot dans des orientations différentes, tel qu'illustré sur la figure qui suit :



a) Déterminez le travail de chaque personne après que le chariot se soit déplacé de 5,00 m;
b) Déterminez la vitesse du chariot après son déplacement de 5,00 m.

7.29 Exercice : Le plan incliné solution ▶



Sur un plan incliné de 12,5° où le coefficient de frottement cinétique est de 0,195, on place un bloc de 1,5 kg et on applique sur lui une force horizontale (contre la surface) de 25 N. Déterminez la distance requise pour qu'il atteigne une vitesse de 3,00 m/s.

7.30 Exercice : Le ski solution ▶

Un skieur de 61,5 kg glisse à 4,25 m/s lorsqu'il atteint la dernière section d'une pente, d'une inclinaison constante de 6,7°. Le coefficient de frottement cinétique entre ses skis et la neige y est de 0,071.

a) Quelle vitesse atteindra-t-il si cette section mesure 120 m?
b) Sur quelle distance glissera-t-il avec cet élan s'il glisse ensuite sur une section horizontale où la neige a la même composition?

7.6 LA PUISSANCE

7.31 Exercice : La puissance d'une force solution ▶

Une force F accélère une masse de 15 kg à 50 km/h en 2,2 s. Quelle est la puissance moyenne de cette force?

7.32 Exercice : Le monte-charge solution ▶

Dans un bâtiment en construction, un monte-charge et son contenu ont une masse totale de 1 250 kg. Le moteur du monte-charge permet de soulever la masse à la vitesse constante de 0,60 m/s. Quelle est la puissance du moteur?

7.33 Exercice : La trottinette solution ▶

Le moteur d'une trottinette électrique pour enfant a une puissance de 450 W. Un enfant utilisant la trottinette parvient à parcourir 100 m en 28 secondes alors que la trottinette applique au sol une force constante. Quelle force la trottinette applique-t-elle au sol?

7.34 Exercice : La rampe de lancement #2 solution ▶

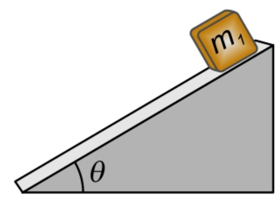
Déterminez la puissance moyenne fournie par le ressort de l'exercice 18 durant la propulsion de la masse si le contact avec le ressort a duré 0,105 secondes.

7.8 L'ÉNERGIE MÉCANIQUE ET LA CONSERVATION

7.35 Exercice : Professor Splash solution ▶

Darren Taylor, alias Professor Splash, est un homme audacieux qui détient le record pour le plus haut saut dans un bassin de 30 centimètres d'eau. Il a déjà sauté d'une hauteur de 11 mètres dans un bassin d'eau de seulement 30 cm. À quelle vitesse a-t-il alors touché la surface de l'eau? (On peut négliger la résistance de l'air.)

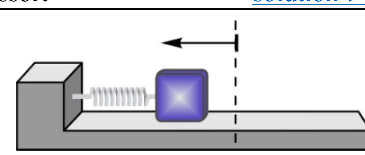
7.36 Exercice : Le plan incliné solution ▶



Une masse de 300 g est déposée sur un plan incliné de 42°, immobile. Après quelle distance aura-t-elle atteint la vitesse de 1,00 m/s si :

a) il n'y a aucun frottement sur la surface?
b) le coefficient de frottement cinétique est de 0,240.

7.37 Exercice : Masse-ressort solution ▶



Une masse de 750 g sur une surface horizontale sans frottement est attachée à un ressort de constante 300 N/m, comme sur la figure qui suit. On comprime le ressort de 15 cm et on lâche la masse de telle sorte qu'elle se met à osciller horizontalement autour de la position d'équilibre du ressort. Quelle sera la vitesse maximale de la masse durant les oscillations?

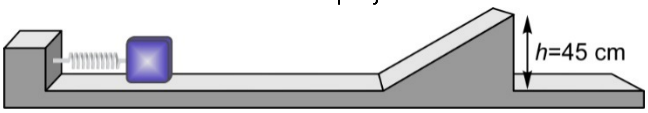
7.38 Exercice : Le saut solution ▶

Une masse de 800 g sur une surface horizontale sans frottement est appuyée contre un ressort de constante 175 N/m comprimé de 40 cm, comme sur la figure qui suit. Lorsqu'on lâche la masse, elle quitte le ressort et glisse vers un plan incliné (θ = 30°) dont le point le plus haut se trouve à 45 cm plus haut que la surface horizontale. La masse deviendra un projectile au-delà de ce plan incliné.

a) Quelle est la vitesse de la masse en quittant le ressort?
b) Quelle est la vitesse de la masse en arrivant au haut du plan incliné?

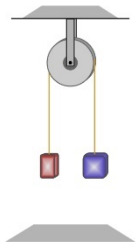
7.25 - v = 3,80 m/s — **7.26** - v = 17,3 m/s — **7.27** - W_{total} = 3,99×10^5 J — **7.28** - a) W_1 = 1 265 J, W_2 = -1 125 J, W_3 = 940 J, W_4 = -1 067 J — b) v = 0,561 m/s
7.29 - Δr = 0,389 m — **7.30** - a) v = 11,3 m/s — b) d = 91,0 m — **7.31** - P = 658 W — **7.32** - P = 7,36×10^3 W — **7.33** - F = 126 N — **7.34** - P_{res} = 309 W
7.35 - v = 14,7 m/s — **7.36** - a) d = 7,62 cm — b) d = 10,4 cm — **7.37** - v = 3,00 m/s

c) Quelle est la hauteur maximale de la masse au-dessus de la surface horizontale?
d) Quelle distance horizontale la masse parcourt-elle durant son mouvement de projectile?



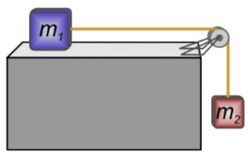
7.39 Exercice : Masses et poulie #1 — solution ▶

Dans le montage ci-contre, les deux masses se trouvent à 50 cm au-dessus du sol. Si m_1 = 1,50 kg et m_2 = 2,50 kg, déterminez le module de la vitesse de la première masse qui touchera le sol.



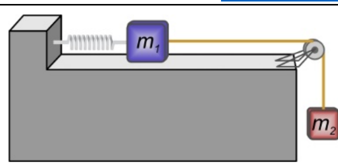
7.40 Exercice : Masses et poulie #2 — solution ▶

Deux masses identiques réunies par une corde peuvent se déplacer librement selon le montage suivant. Après quelle distance le module de la vitesse des masses sera-t-il de 1 m/s si elles partent du repos?



7.41 Exercice : Masses et poulie #3 — solution ▶

Deux masses réunies par une corde et reliées à un ressort peuvent se déplacer selon le montage suivant. m_1 = 800 g et m_2 = 400 g. La constante de rappel du ressort et de 75 N/m, et le coefficient de frottement cinétique entre m_1 et la surface horizontale est 0,270. Si on lâche le système à partir du repos, l'étirement du ressort étant nul :



a) déterminez l'étirement maximal du ressort;
b) déterminez le module de la vitesse maximale du système, si celle-ci survient à mi-chemin du déplacement du système.

7.42 Exercice : Le caillou — solution ▶

Du haut d'une falaise de 10 mètres, on lance un caillou à 13,0 m/s. Déterminez le module de sa vitesse en arrivant en bas de la falaise si on l'a lancé dans l'orientation suivante :

a) 30° au-dessus de l'horizontale;
b) à l'horizontale;
c) 15° sous l'horizontale.

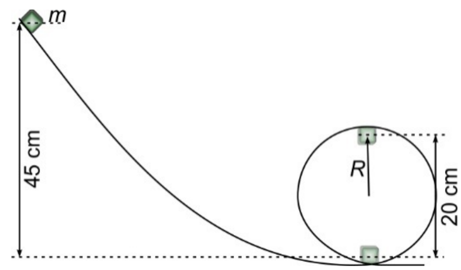
7.43 Exercice : Le pendule — solution ▶

Un pendule formé d'une masse ponctuelle de 75 g suspendue à un fil de 80,0 cm est soulevé de manière à ce que le fil forme un angle de 60° avec la verticale. On lâche alors le pendule.

a) À quelle vitesse la masse du pendule passera-t-elle au point le plus bas?
b) Quelle sera le module de la vitesse du pendule durant la remontée lorsqu'il fera un angle de 30° avec la verticale?
c) Quel angle fait la corde du pendule avec la verticale lorsque le module de la vitesse est de 2,00 m/s?

7.44 Exercice : La boucle verticale — solution ▶

Un bloc pouvant glisser sans frottement est lâchée du haut d'une rampe inclinée menant vers une boucle circulaire verticale. Le bloc glisse à partir d'un point 45 cm plus haut que le bas de la boucle, et le diamètre de sa trajectoire dans la boucle est de 20 cm.



a) Déterminez la vitesse du bloc en arrivant au bas de la boucle.
b) Déterminez la vitesse du bloc au sommet de la boucle.
c) Déterminez le rayon R maximal assurant que le bloc demeure en contact avec la surface de la boucle.

7.45 Exercice : Diagramme 1 — solution ▶

Une automobile immobile à un feu de circulation se met à accélérer à un taux régulier, sur une route horizontale. Pour une accélération constante jusqu'à une vitesse v, tracez le diagramme de l'énergie cinétique en fonction :

a) du temps;
b) de la distance parcourue;
c) de la vitesse.

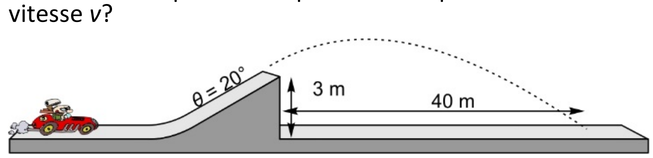
7.46 Exercice : Diagramme 2 — solution ▶

Un bloc glisse vers le bas et sans frottement sur un plan incliné (d'inclinaison θ), à partir du repos, et sur une distance d l'amenant à la hauteur zéro. Tracez le diagramme d'énergie (comprenant à la fois l'énergie potentielle gravitationnelle, l'énergie cinétique et l'énergie totale) pour le mouvement du bloc glissant jusqu'à la hauteur $y = 0$:

a) en fonction du temps;
b) en fonction de la hauteur.

7.47 Exercice : À reculons — solution ▶

Un cascadeur en auto roule vers un tremplin incliné à 20° et haut de 3 mètres, à une vitesse v. Il lâche l'accélérateur au moment où il atteint le tremplin (on néglige tout frottement dans les roues). Il retombe au sol à une distance horizontale de 40 mètres après avoir quitté le tremplin. Quelle était sa vitesse v?



$\boxed{7.38}$- a) v = 5,92 m/s — b) v = 5,12 m/s — c) h_{max} = 0,783 m — d) x = 2,94 m — $\boxed{7.39}$- v = 1,57 m/s — $\boxed{7.40}$- d = 10,2 cm — $\boxed{7.41}$- a) v = 4,81 m/s — b) v = 0,190 m/s — $\boxed{7.42}$- a) v = 19,1 m/s — b) v = 19,1 m/s — c) v = 19,1 m/s — $\boxed{7.43}$- a) v = 2,80 m/s — b) v = 2,40 m/s — c) θ = 41,0° — $\boxed{7.44}$- a) v = 2,97 m/s — b) v = 2,21 m/s — c) R = 0,180 m — $\boxed{7.45}$- ↓↓↓ — $\boxed{7.46}$- ↓↓↓ — $\boxed{7.47}$- v = 23,8 m/s

1 à 11 12 à 24 25 à 38 39 à 47

CH 7 L'ÉNERGIE CINÉTIQUE ET LE TRAVAIL

7.1 L'ÉNERGIE CINÉTIQUE (DE TRANSLATION)

7.1 Solution : La balle de revolver retour à la question ▲

a) K = 858 J

L'énergie cinétique peut se calculer directement avec la masse et la vitesse de la balle :

$$K=\tfrac{1}{2}mv^2 \; = \; \tfrac{1}{2}\times 0,00950\,\text{kg}\times\left(425\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \; = \; 858\text{ J}$$

b) m = 1,91 kg

La masse ayant la même énergie cinétique à 30 m/s que la balle de révolver est :

$$K=\tfrac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad m=\frac{2K}{v^2} \; = \; \frac{2\times 858\text{ J}}{\left(30\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} \; = \; 1,91\,\text{kg}$$

c) v = 20,7 m/s

La vitesse d'une masse de 4 kg ayant la même énergie cinétique que la balle de révolver est :

$$K=\tfrac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v=\sqrt{\frac{2K}{m}} \; = \; \sqrt{\frac{2\times 858\text{ J}}{4\text{ kg}}} \; = \; 20,7\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

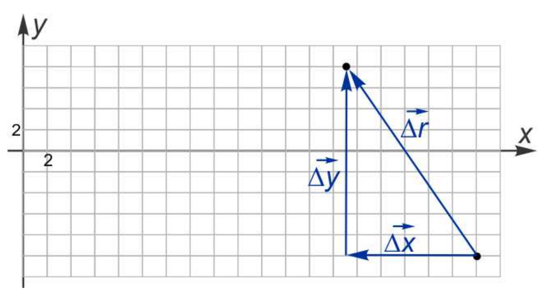
7.2 Solution : Variation d'énergie cinétique retour à la question ▲

ΔK = 13,9 J

Pour calculer la variation d'énergie cinétique, on doit pouvoir évaluer les énergies cinétiques initiale et finale, donc les vitesses initiale et finale.

$$\Delta K=K-K_0 \; = \; \tfrac{1}{2}mv^2-\tfrac{1}{2}mv_0^2 \; = \; \tfrac{1}{2}m\left(v^2-v_0^2\right) \qquad (1)$$

Puisque le mouvement est rectiligne, on peut traiter le mouvement le long de cette trajectoire pour évaluer la vitesse finale. On doit d'abord calculer la distance parcourue le long de cette trajectoire (voir figure ci-contre). Selon les positions données, les coordonnées du déplacement sont.



$$\Delta\vec{r}=\vec{r}-\vec{r}_0 \; = \; \left(13,5\vec{i}+4\vec{j}\right)\text{m}-\left(19\vec{i}-5\vec{j}\right)\text{m} \; = \; \left(-5,5\vec{i}+9\vec{j}\right)\text{m}$$

Le module du déplacement est :

$$\Delta r=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} \; = \; \sqrt{(-5,5\,\text{m})^2+(9\,\text{m})^2} \; = \; 10,5\,\text{m}$$

Par cinématique, la vitesse peut être évaluée à la fin de ce déplacement. Le long de l'axe du déplacement :

$s_0=0$

$s=10,5\,\text{m}$

$v_0=2,50\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$

$v=?$

$a=?$

$t=1,45\,\text{s}$

Sans avoir besoin de déterminer l'accélération, on peut trouver la vitesse finale par :

$$x=x_0+\frac{v+v_0}{2}\times t$$

$$v=\frac{2(x-x_0)}{t}-v_0 \; = \; \frac{2\times(10,5\,\text{m}-0)}{1,45\text{ s}}-2,50\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} \; = \; 12,0\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

1 à 11 12 à 24 25 à 38 39 à 47

On peut finalement reprendre l'équation (1) pour calculer la variation d'énergie cinétique :

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}m\left(v^2 - v_0^2\right) \;=\; \tfrac{1}{2}\times 0{,}200\,\text{kg}\times\left(\left(12{,}0\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(2{,}50\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2\right) \;=\; 13{,}9\,\text{J}$$

7.3 Solution : Le pourcentage d'augmentation	retour à la question ▲

Δ% = 216%

Exprimons d'abord l'équation du pourcentage d'augmentation pour y voir les valeurs qu'on aura à déterminer. Le pourcentage d'augmentation de l'énergie cinétique est donné par :

$$^*\ \Delta\% = \frac{K - K_0}{K_0}\times 100 \qquad\qquad (1)$$

*Le pourcentage de variation d'une valeur est toujours donné par le rapport de la variation (ici « $K - K_0$ ») sur la valeur de référence, toujours la valeur qui précède la variation (donc « K_0 »).

On doit donc évaluer les énergies cinétique initiale et finale :

$$K_0 = \tfrac{1}{2}mv_0^2 \qquad \text{et} \qquad K = \tfrac{1}{2}mv^2$$

Puisqu'on connaît la masse et les vitesses, on pourrait faire le calcul des valeurs d'énergie cinétique, mais en détaillant l'expression des énergie dans l'équation (1), on peut trouver une expression simplifiée :

$$\Delta\% = \frac{K - K_0}{K_0}\times 100 \;=\; \frac{\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2}{\tfrac{1}{2}mv_0^2}$$

En simplifiant, on constate que la masse n'a pas à être connue pour évaluer le pourcentage de variation :

$$\Delta\% = \frac{v^2 - v_0^2}{v_0^2}\times 100 \;=\; \frac{\left(80\,\tfrac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2 - \left(45\,\tfrac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2}{\left(45\,\tfrac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2}\times 100 \;=\; 216\%$$

7.2 L'ÉNERGIE POTENTIELLE GRAVITATIONNELLE (RELATIVE)

7.4 Solution : Le Taipei 101	retour à la question ▲

U_g = J

L'énergie potentielle gravitationnelle est donnée par :

$$U_g = mgy$$

On indique que la référence pour le calcul est le niveau de la rue, par rapport à laquelle est calculée l'altitude de la masse. L'énergie est donc :

$$U_g = mgy \;=\; 660\times 10^3\,\text{kg}\times 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\times 377\,\text{m} \;=\; 2{,}44\times 10^9\,\text{J}$$

7.5 Solution : Le snowboard	retour à la question ▲

Δy = -625 m

La variation d'énergie potentielle gravitationnelle (une perte, donc $\Delta U_g = -4{,}17\times 10^5$ J) est liée à la variation de hauteur par :

$$\Delta U_g = U_g - U_{g0} \;=\; mgy - mgy_0 \;=\; mg\left(y - y_0\right) \;=\; mg\cdot\Delta y$$

Δy est la dénivellation recherchée, donc :

$$\Delta y = \frac{\Delta U_g}{mg} \;=\; \frac{-4{,}17\times 10^5\,\text{J}}{68\,\text{kg}\times 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}} \;=\; -625\,\text{m}$$

1 à 11 12 à 24 25 à 38 39 à 47

7.6 Solution : Mmmmh, chocolat! retour à la question ▲

n = 294 ét.

La variation d'énergie potentielle gravitationnelle est liée à la variation de hauteur par :

$$\Delta U_g = U_g - U_{g0} \; = \; mgy - mgy_0 \; = \; mg(y - y_0) \; = \; mg \cdot \Delta y$$

Δy est la variation de hauteur recherchée :

$$\Delta y = \frac{U_g}{mg}$$

En incluant la conversion des unités d'énergie à même le calcul du gain de hauteur :

$$\Delta y = \frac{U_g}{mg} \; = \; \frac{149\text{ Cal} \times \frac{4\,184\text{ J}}{\text{Cal}}}{60\text{ kg} \times 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \; = \; 1\,059\text{ m}$$

Même si le résultat peut être surprenant c'est bien un kilomètre d'altitude. Dans la réalité, le corps consomme beaucoup plus d'énergie pour faire un effort physique que la seule énergie potentielle gravitationnelle liée à l'ascension de la masse de notre corps.

En étage de 3,60 m, cette hauteur correspond à :

$$n = \frac{1\,059\text{ m}}{3{,}60\,\frac{\text{m}}{\text{ét}}} \; = \; 294\text{ ét}$$

7.3 L'ÉNERGIE POTENTIELLE ÉLASTIQUE

7.7 Solution : L'énergie emmagasinée retour à la question ▲

a) $U_é$ = 0,500 J

L'énergie potentielle d'un ressort étiré est :

$$U_é = \tfrac{1}{2}kx^2$$

L'étirement est x = 0,20 m :

$$U_é = \tfrac{1}{2}kx^2 \; = \; \tfrac{1}{2} \times 25\,\tfrac{\text{N}}{\text{m}} \times (0{,}20\text{ m})^2 \; = \; 0{,}500\text{ J}$$

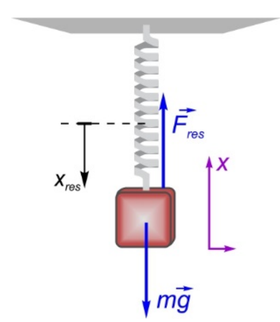
b) $U_é$ = 0,500 J

Le ressort étant comprimé, l'étirement, en mètres, est x = -0,20 m :

$$U_é = \tfrac{1}{2}kx^2 \; = \; \tfrac{1}{2} \times 25\,\tfrac{\text{N}}{\text{m}} \times (-0{,}20\text{ m})^2 \; = \; 0{,}500\text{ J}$$

c) $U_é$ = 1,23 J

On doit utiliser la loi de Hooke pour déterminer l'étirement du ressort. Quand une masse y est suspendue en équilibre, son accélération est nulle. La force du ressort, vers le haut, est donc égale au poids de la masse suspendue (voir schéma). D'abord, les équations des forces sont :



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{F}_{res} + m\vec{g}$$

$$\sum F = m\underbrace{a_y}_{=0} = F_{res} - mg \; = \; 0$$

$$F_{res} = mg \qquad (1)$$

La force du ressort est aussi donnée par, F_{res} = -kx, où x, l'étirement du ressort, se fait vers le bas (l'extrémité libre du ressort se déplace vers le bas). La force dirigée vers le haut a donc un module égal à « kx » :

$$F_{res} = |-kx| \; = \; kx$$

En liant cette expression à l'équation (1) :

$$F_{res} = mg = kx \quad \Rightarrow \quad x = \frac{mg}{k}$$

L'énergie emmagasinée par le ressort, étiré d'une distance *d*, est alors :

$$U_é = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2 = \frac{(mg)^2}{2k}$$

$$U_é = \frac{(mg)^2}{2k} = \frac{\left(0{,}800\,\text{kg}\times 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2}{2\times 25\,\frac{\text{N}}{\text{m}}} = 1{,}23\,\text{J}$$

7.8 Solution : Constante inconnue

retour à la question ▲

a) $U_é$ = 4,81 J

L'énergie potentielle d'un ressort étiré est :

$$U_é = \tfrac{1}{2}kx^2$$

La constante de rappel est inconnue, mais on peut l'évaluer à partir de la force appliquée et de l'étirement qui en résulte, selon la loi de Hooke, en ne considérant que le module :

$$|F| = |-kx| \quad \Rightarrow \quad k = \frac{F}{x} \qquad (1)$$

L'énergie est donc :

$$U_é = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{F}{x}\right)x^2 = \frac{Fx}{2} = \frac{52\,\text{N}\times 0{,}185\,\text{m}}{2} = 4{,}81\,\text{J}$$

b) x = 0,131 m

On peut calculer la constante de rappel du ressort pour considérer une valeur doublée en b). Selon l'équation (1) trouvé en a) :

$$k = \frac{F}{x} = \frac{52\,\text{N}}{0{,}185\,\text{m}} = 281\,\tfrac{\text{N}}{\text{m}}$$

On cherche l'allongement d'un ressort accumulant 4,81 J quand sa constante de rappel est de 2×281 N/m. À partir de l'équation de l'énergie potentielle élastique :

$$U_é = \tfrac{1}{2}kx^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{2U_é}{k}} = \sqrt{\frac{2\times 4{,}81\,\text{J}}{\left(2\times 281\,\frac{\text{N}}{\text{m}}\right)}} = 0{,}131\,\text{m}$$

7.9 Solution : Le spring

retour à la question ▲

h = 0,191 m

Si on lâche la masse subitement, l'énergie potentielle élastique se transformera en énergie potentielle gravitationnelle (le passage intermédiaire en énergie cinétique n'influence pas la hauteur finale s'il n'y a pas de perte d'énergie). On peut donc écrire que l'énergie potentielle élastique initiale (au début il n'y a que cette forme d'énergie), se transforme entièrement en énergie potentielle gravitationnelle (à la fin il n'y a que cette forme) :

$$U_{éi} = U_{gf}$$

On développe les deux termes d'énergie :

$$\tfrac{1}{2}kx_i^2 = mgh_f$$

$$h = \frac{kx^2}{2mg} = \frac{300\,\frac{\text{N}}{\text{m}}\times(-0{,}05\,\text{m})^2}{2\times 0{,}200\,\text{kg}\times 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0{,}191\,\text{m}$$

1 à 11 12 à 24 25 à 38 39 à 47

7.10 Solution : Doubler l'étirement retour à la question ▲

$U_é$ = 40,0 J

On peut répondre à la question simplement en considérant que l'énergie est proportionnelle au carré de l'étirement. Un étirement deux fois plus grand pour un même ressort entraîne donc une énergie quatre fois plus grande, donc une énergie de 40 joules. On peut le démontrer en écrivant l'équation de l'énergie potentielle élastique pour les deux scénarios :

$$U_{é1} = \tfrac{1}{2}kx_1^2 \qquad \text{et} \qquad U_{é2} = \tfrac{1}{2}kx_2^2$$

La constante de rappel est la même dans les deux cas, et on indique que $x_2 = 2x_1$:

$$U_{é2} = \tfrac{1}{2}k\left(2x_1\right)^2 \;=\; \tfrac{1}{2}k\left(4x_1^2\right) \;=\; 4\times\underbrace{\tfrac{1}{2}kx_1^2}_{=U_{é1}} \;=\; 4\times U_{é1} \;=\; 4\times 10\text{ J} \;=\; 40\text{ J}$$

3.3 LE PRODUIT SCALAIRE

7.11 Solution : Le produit scalaire I retour à la question ▲

$-10{,}0\text{ m}^2$

Puisqu'on connaît les composantes des deux vecteurs impliqués, on peut utiliser la forme suivante du produit scalaire :

$$\vec{R}\bullet\vec{S} = R_xS_x + R_yS_y + R_zS_z$$

Le vecteur $\vec{S}$ n'a que deux termes; on doit comprendre que la composante *y* est nulle. Avec les valeurs connues :

$$\vec{R}\bullet\vec{S} = \left(2\text{ m}\times\left(-1\text{ m}\right)\right) + \left(1\text{ m}\times 0\right) + \left(\left(-4\text{ m}\right)\times 2\text{ m}\right) \;=\; -10{,}0\text{ m}^2$$

7.12 Solution : Le produit scalaire II retour à la question ▲

$-6{,}47\text{ cm}^2$

On connait les modules des deux vecteurs, et on a des informations permettant d'évaluer l'angle entre eux. On pourra alors utiliser la forme suivante du produit scalaire :

$$\vec{A}\bullet\vec{B} = AB\cos\theta_{AB}$$

Les angles de 45° et 60° que les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ font avec l'axe *x* entraînent un angle de 105° entre eux. Les modules étant tous deux de 5 cm :

$$\vec{A}\bullet\vec{B} = 5\text{ cm}\times 5\text{ cm}\times\cos 105° \;=\; -6{,}47\text{ cm}^2$$

7.13 Solution : Le produit scalaire III retour à la question ▲

$A = B = 12{,}8$

Puisqu'on doit manipuler le module des vecteurs et l'angle qu'ils forment entre eux, l'équation utile pour le produit scalaire sera :

$$\vec{A}\bullet\vec{B} = AB\cos\theta_{AB}$$

Les vecteurs ayant des modules identiques, on pourrait écrire

$$\vec{A}\bullet\vec{B} = AA\cos\theta_{AB} \;=\; A^2\cos\theta_{AB}$$

Notez que l'angle est toujours celui entre les deux vecteurs (n'ayant pas la même orientation), mais puisque $B = A$, alors $AB = A^2$.

On nous indique que le résultat du produit scalaire des deux vecteurs est 42,5, donc on peut isoler le module *A* pour évaluer les modules inconnus :

$$A = \sqrt{\frac{\vec{A}\bullet\vec{B}}{\cos\theta_{AB}}} \;=\; \sqrt{\frac{42{,}5}{\cos 75°}} \;=\; 12{,}8$$

1 à 11 12 à 24 25 à 38 39 à 47

Le résultat du produit scalaire n'ayant pas d'unités, on en déduit que les modules n'ont pas d'unités.

7.14 Solution : Le produit scalaire IV retour à la question ▲

a) $\left(-27\vec{i}+45\vec{j}+9\vec{k}\right)\mathrm{m}^2$

L'expression à résoudre est $\left(\vec{X}\bullet\vec{Y}\right)\vec{Z}$.

Selon les règles de priorité des opérations, on doit d'abord effectuer le produit scalaire de $\vec{X}$ et $\vec{Y}$. Avec les composantes, on a :

$$\vec{X}\bullet\vec{Y}=X_xY_x+X_yY_y+X_zY_z \;=\; (3\,\mathrm{m}\times 4\,\mathrm{m})+(0\times(-1\,\mathrm{m}))+((-1\,\mathrm{m})\times 3\,\mathrm{m}) \;=\; 9\,\mathrm{m}^2$$

On effectue ensuite le produit par $\vec{Z}$:

$$\left(\vec{X}\bullet\vec{Y}\right)\vec{Z} \;=\; 9\,\mathrm{m}^2\times\left(-3\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}\right) \;=\; \left(-27\vec{i}+45\vec{j}+9\vec{k}\right)\mathrm{m}^2$$

b) -10,8 m

Les règles de priorité des opérations exigent qu'on effectue d'abord le produit scalaire de $\vec{Y}$ et $\vec{Z}$:

$$\vec{Y}\bullet\vec{Z}=Y_xZ_x+Y_yZ_y+Y_zZ_z \;=\; (4\,\mathrm{m}\times(-3))+((-1\,\mathrm{m})\times 5)+(3\,\mathrm{m}\times 1) \;=\; -14{,}0\,\mathrm{m}$$

L'opération suivante est une somme, impliquant le module de $\vec{X}$:

$$X=\sqrt{X_x^2+X_y^2+X_z^2} \;=\; \sqrt{(3\,\mathrm{m})^2+(0)^2+(-1\,\mathrm{m})^2} \;=\; \sqrt{10\,\mathrm{m}}$$

Donc :

$$X+\vec{Y}\bullet\vec{Z} \;=\; \sqrt{10}\,\mathrm{m} \;+\; (-14\,\mathrm{m}) \;=\; -10{,}8\,\mathrm{m}$$

c) 4,00 m

Effectuons d'abord la différence à l'intérieur de la parenthèse :

$$\left(\vec{X}-\vec{Y}\right) \;=\; \left(3\vec{i}+0\vec{j}-1\vec{k}\right)\mathrm{m} \;-\; \left(4\vec{i}-1\vec{j}+3\vec{k}\right)\mathrm{m} \;=\; \left(-\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}\right)\mathrm{m}$$

On peut ensuite procéder au produit scalaire de ce résultat et du vecteur $\vec{Z}$:

$$\left(\vec{X}-\vec{Y}\right)\bullet\vec{Z} \;=\; \left(-\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}\right)\mathrm{m}\bullet\left(-3\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}\right) \;=\; ((-1\,\mathrm{m})\times(-3))+(1\,\mathrm{m}\times 5)+((-4\,\mathrm{m})\times 1) \;=\; 4{,}00\,\mathrm{m}$$

7.15 Solution : L'angle retour à la question ▲

θ_{AB} = 60,7°

On peut utiliser les deux définitions du produit scalaire pour faire un lien entre les composantes (que l'on connaît) et l'angle entre les vecteurs :

$$\vec{A}\bullet\vec{B}=AB\cos\theta_{AB}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

On peut isoler l'angle θ_{AB} :

$$\theta_{AB}=\cos^{-1}\left(\frac{A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z}{AB}\right)$$

On peut évaluer séparément les modules des vecteurs :

$$\vec{A}=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2} \;=\; \sqrt{(12\,\mathrm{m})^2+(-2\,\mathrm{m})^2+(0)^2} \;=\; \sqrt{148}\,\mathrm{m}$$

$$\vec{B}=\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2} \;=\; \sqrt{(4\,\mathrm{m})^2+(0)^2+(7\,\mathrm{m})^2} \;=\; \sqrt{65}\,\mathrm{m}$$

On peut alors calculer l'angle :

$$\theta_{AB} = \cos^{-1}\left(\frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{AB}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{(12\,\text{m})\times(4\,\text{m})+(-2\,\text{m})\times(0)+(0)\times(7\,\text{m})}{\sqrt{148}\,\text{m}\times\sqrt{65}\,\text{m}}\right) = 60{,}7°$$

7.4 LE TRAVAIL

7.16 Solution : Force unique retour à la question ▲

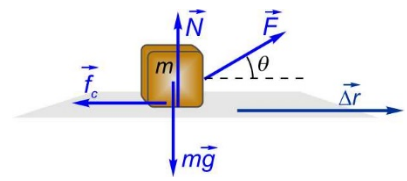
W = 1625 J

On indique que le déplacement de la boîte se fait dans la même orientation que la force. L'angle entre le vecteur force et le vecteur déplacement est donc de 0°. Le calcul du travail se fait avec l'équation :

$$W = F \cdot \Delta r \cdot \cos\theta_{F\,\Delta r} = 250\,\text{N}\times 6{,}5\,\text{m}\times\cos 0° = 1\,625\,\text{J}$$

7.17 Solution : Travailler vers la droite retour à la question ▲

a) W_F = 2 209 J



On connaît le module de la force F, ainsi que le module du déplacement. L'angle entre cette force et le déplacement est de 25°. On calcule donc le travail par :

$$W_F = F \cdot \Delta r \cdot \cos\theta = 325\,\text{N}\times 7{,}5\,\text{m}\times\cos 25° = 2\,209\,\text{J}$$

b) W_g = 0 J

Puisque la force gravitationnelle dans cette situation est perpendiculaire au déplacement effectué, son travail sera nul. Il n'est donc pas nécessaire d'impliquer les valeurs de force et de déplacement pour évaluer ce travail.

$$W_g = F_g \cdot \Delta r \cdot \cos\theta = F_g \cdot \Delta r \times \cos 90° = 0\,\text{J}$$

c) W_N = 0 J

La force normale également est perpendiculaire au déplacement (dans cette situation). Son travail sera donc nul, comme pour la force normale. Il n'est donc pas nécessaire d'évaluer le module de la force normale :

$$W_N = N \cdot \Delta r \cdot \cos\theta = N \cdot \Delta r \times \cos 90° = 0\,\text{J}$$

d) W_f = -1 071 J

Le calcul du travail de la force de frottement exige qu'on évalue d'abord la force normale, puisqu'elle intervient dans le calcul de la force de frottement statique ($f_c = \mu_c N$). Rigoureusement, on doit alors procéder à l'analyse des forces sur la masse. Selon un axe vertical (disons y), on a :

$$\sum F_y = m\underbrace{a_y}_{=0} = N + F\sin\theta - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg - F\sin\theta$$

Le travail de la force de frottement est alors :

$$W_f = f_c \cdot \Delta r \cdot \cos\theta_{f-\Delta r} = \mu_c N \cdot \Delta r \cdot \cos\theta_{f-\Delta r} = \mu_c\left(mg - F\sin\theta\right)\cdot \Delta r \cdot \cos\theta_{f-\Delta r}$$

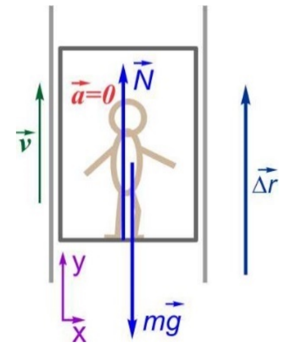
La force de frottement cinétique s'opposant au déplacement, l'angle entre cette force et le déplacement est de 180° :

$$W_f = 0{,}355\times\left(55\,\text{kg}\times 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} - 325\,\text{N}\times\sin 25°\right)\times 7{,}5\,\text{m}\times\cos 180° = -1\,071\,\text{J}$$

[1 à 11] [12 à 24] [25 à 38] [39 à 47]

7.18 Solution : L'ascenseur retour à la question ▲

a) W_g = -8 652 J



Sur un passager dans l'ascenseur, seules deux forces agissent, la force gravitationnelle et la force normale. Pour calculer leur travail, on doit d'abord évaluer leur module. Le poids se calcule à partir de la masse, et est orienté en sens opposé au déplacement (à 180° du vecteur déplacement). On peut alors calculer son travail :

$$W_g = (mg)\cdot \Delta r\cdot\cos\theta \quad = \quad \left(60\,\text{kg}\times 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)\times 14{,}7\,\text{m}\times\cos 180° \quad = \quad -8\,652\,\text{J}$$

La force gravitationnelle s'oppose à l'élévation d'une masse, c'est donc normale qu'elle est ait un travail négatif.

b) W_N = 8 652 J

Le module de la force normale s'obtient par l'analyse des forces, dans le contexte d'une accélération nulle :

$$\sum\vec{F} = m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g}$$

$$\sum F_y = m\underbrace{a_y}_{=0} = N - mg \quad = \quad 0 \qquad \Rightarrow \qquad N = mg$$

La force normale est orientée dans la même direction que le déplacement, donc θ = 0° dans le calcul du travail :

$$W_g = N\cdot\Delta r\cdot\cos\theta \quad = \quad (mg)\cdot\Delta r\cdot\cos\theta \quad = \quad \left(60\,\text{kg}\times 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)\times 14{,}7\,\text{m}\times\cos 0° \quad = \quad +8\,652\,\text{J}$$

On trouve la même quantité que pour la force gravitationnelle, mais avec un signe opposé. La normale est la force qui produit l'élévation, son travail est donc positif.

7.19 Solution : Travail en 3D retour à la question ▲

W_F = 9,93 J

Puisqu'on connait la force et le déplacement par leurs coordonnées cartésiennes, on peut calculer le travail à partir de la définition du travail qui utilise ces composantes :

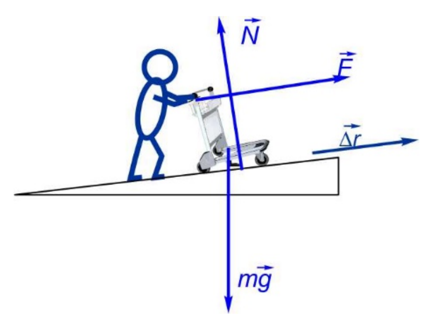
$$W_F = F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z \quad = \quad 12{,}5\,\text{N}\times(-5{,}5\,\text{m}) \quad + \quad 9{,}2\,\text{N}\times 10{,}9\,\text{m} \quad + \quad (-10{,}8\,\text{N})\times 2{,}0\,\text{m} \quad = \quad 9{,}93\,\text{J}$$

7.20 Solution : La montée retour à la question ▲

Δr = 37,6 m

Le travail de la force mentionnée est défini par $W_F = F\cdot\Delta r\cdot\cos\theta_{F\Delta r}$. Puisque la force est parallèle au déplacement et dans le même sens, l'angle qu'elle fait avec le déplacement est de 0°. On peut donc trouver une expression du module du déplacement Δr :

$$\Delta r = \frac{W_F}{F\cos\theta_{F\Delta r}}$$



On ignore cependant la force appliquée sur le chariot. On doit procéder à l'analyse des forces pour évaluer la force, sachant que l'accélération est nulle (vitesse constante) :

$$\sum\vec{F} = m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} + m\vec{g}$$

$$\sum F_y = m\underbrace{a_x}_{=0} = F - mg\sin\theta \quad = \quad 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = m\underbrace{a_y}_{=0} = N - mg\cos 1 \quad = \quad 0 \qquad (2)$$

L'équation (1) nous fournit une expression de la force F en fonction de valeurs connues :

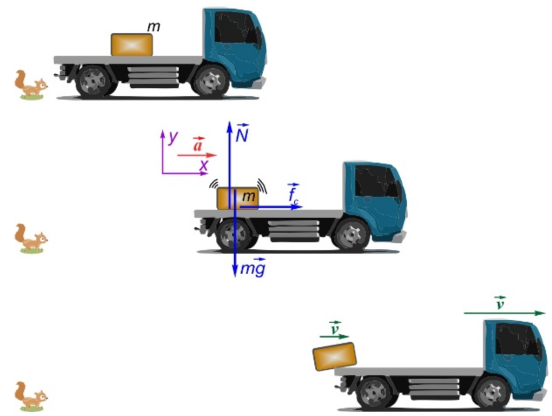
$$F = mg\sin\theta$$

On peut alors calculer le travail (attention de ne pas confondre l'angle entre force et déplacement ($\theta_{F\Delta r}$) et l'angle d'inclinaison de la surface θ) :

$$\Delta r = \frac{W_F}{F\cos\theta_{F\Delta r}} = \frac{W_F}{(mg\sin\theta)\cos\theta_{F\Delta r}} = \frac{1\,250\text{ J}}{\left(25\text{ kg}\times 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\times\sin 7{,}8°\right)\times\cos 0°} = 37{,}6\text{ m}$$

7.21 Solution : Le travail du frottement retour à la question ▲

a) W_f = 4400 J



Le calcul du travail de la force de frottement implique qu'on évalue cette force de frottement, et on ne nous fournit pas la valeur du coefficient de frottement cinétique. Cependant on nous donne des informations sur le mouvement de la caisse, et l'accélération combinée à la masse de la caisse, permet de quantifier la force de frottement, par l'analyse des forces. La force de frottement cinétique est la seule force horizontale agissant sur la caisse, et elle accélère vers la droite, même si elle glisse (voir figure ci-contre).

Durant le mouvement de la caisse, on a :

$$\sum\vec{F} = m\vec{a} = \vec{N} + \vec{f}_c + m\vec{g}$$

$$\sum F_x = ma_x = f_c \qquad (1)$$

$$\sum F_y = ma_y = N - mg = 0 \qquad (2)$$

L'équation (1) fournit une expression de f_c à partir de valeurs connues ($f_c = ma_x$). Cependant, le calcul du travail exige aussi que l'on connaisse le déplacement de la masse durant sa phase de glissement sur la plate-forme :

$$W_f = f\cdot\Delta r\cdot\cos\theta_{f\Delta r}$$

On peut alors procéder par cinématique pour évaluer ce déplacement, qui se fait horizontalement :

$$x_0 = 0$$
$$x = ??$$
$$v_{x0} = 0$$
$$v_x = ?$$
$$a_x = 2{,}75\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$
$$t = 3{,}5\text{ s}$$

$$x = x_0 + v_{x0}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 = \tfrac{1}{2}a_x t^2$$

On peut alors calculer le travail de la force de frottement :

$$W_f = f\cdot\Delta r\cdot\cos\theta_{f\Delta r} = (ma_x)\times\left(\tfrac{1}{2}a_x t^2\right) = \tfrac{1}{2}ma_x^2t^2 = \tfrac{1}{2}\times 95\text{ kg}\times\left(2{,}75\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2\times(3{,}5\text{ s})^2 = 4400\text{ J}$$

b) Oui

On a trouvé un travail positif, ce qui n'est pas usuel pour une force de frottement cinétique. Mais ici, la force de frottement cinétique est précisément celle qui a engendré un mouvement de la caisse (c'était la seule force horizontale sur la caisse). Son travail est donc positif parce qu'elle agit dans le même sens que le déplacement de la caisse, et le signe du travail trouvé est cohérent avec le mouvement.

c) μ_c = 0,280

On peut utiliser l'équation élémentaire de la force de frottement (seule équation à impliquer le coefficient de frottement cinétique) pour évaluer μ_c :

$$f_c = \mu_c N \quad \Rightarrow \quad \mu_c = \frac{f_c}{N}$$

Les expressions équivalentes à f_c et à N fournies par les équations (1) et (2) entraînent :

1 à 11 12 à 24 25 à 38 39 à 47

$$\mu_c = \frac{f_c}{N} = \frac{ma_x}{mg} = \frac{a_x}{g} = \frac{2{,}75\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{9{,}81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}}} = 0{,}280$$

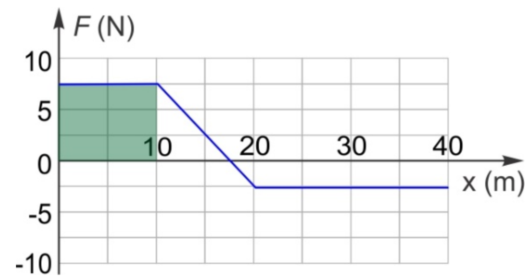
7.22 Solution : Le graphique retour à la question ▲

a) W = 75 J

On peut obtenir le travail par le calcul de l'aire sous la courbe entre les positions initiale et finale.

Pour un déplacement de x = 0 m à x = 10 m, l'aire impliquée est illustrée sur la figure ci-contre; il s'agit d'un rectangle. L'aire se calcule par :

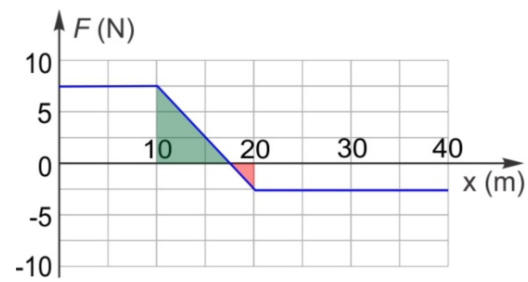
$$W = (F)\times(x_f - x_i) = 7{,}5\,\text{N}\times(10\,\text{m} - 0) = 75\,\text{J}$$



b) W = 25,0 J

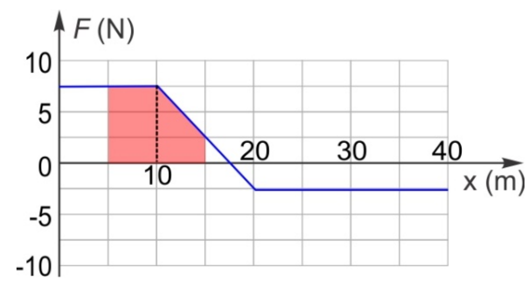
L'aire sous la courbe interceptée comporte une section au-dessus de l'axe (travail positif) et une section en-dessous de l'axe (travail négatif). Il s'agit de l'aire totale de deux triangles :

$$W = \frac{7{,}5\,\text{N}\times(17{,}5\,\text{m} - 10\,\text{m})}{2} + \frac{-2{,}5\,\text{N}\times(20\,\text{m} - 17{,}5\,\text{m})}{2} = 25\,\text{J}$$



c) W = -62,5 J

L'aire sous la courbe interceptée doit être subdivisée pour être calculée. On voit un rectangle, ce 5 m à 10 m, et un trapèze de 10 m à 15 m. L'aire se trouve au-dessus de l'axe horizontal. Cependant, le déplacement se fait vers les x négatifs, et le travail accompli sera donc négatif. Le calcul de l'aire (calcul du travail) est :



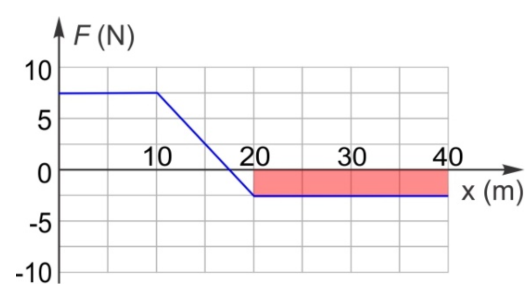
$$W = (b\times h) + \frac{(B+b)h}{2} = F_5 \times \overbrace{(x_f - x_i)}^{rectangle} + \frac{(F_{15}+F_{10})\overbrace{(x_f - x_i)}^{trapèze}}{2}$$

$$W = 7{,}5\,\text{N}\times(5\,\text{m} - 10\,\text{m}) + \frac{(7{,}5\,\text{N} + 2{,}5\,\text{N})\times(10\,\text{m} - 15\,\text{m})}{2} = -62{,}5\,\text{J}$$

d) W = -50,0 J

L'aire sous la courbe interceptée est un rectangle et se trouve en-dessous de l'axe horizontal, ce qui inverse le signe du travail. Le calcul de l'aire (calcul du travail) est :

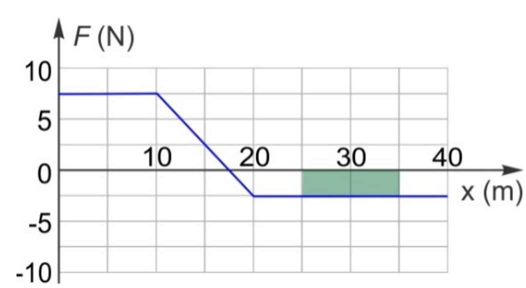
$$W = (F)\times(x_f - x_i) = -2{,}5\,\text{N}\times(40\,\text{m} - 20\,\text{m}) = -50{,}0\,\text{J}$$



e) W = 25,0 J

L'aire sous la courbe interceptée est un rectangle et se trouve en-dessous de l'axe horizontal, ce qui inverse le signe du travail. Cependant, le déplacement se fait également vers les x négatifs, et le travail accompli redevient positif. Le calcul de l'aire (calcul du travail) est :

$$W = (F)\times(x_f - x_i) = -2{,}5\,\text{N}\times(25\,\text{m} - 35\,\text{m}) = 25{,}0\,\text{J}$$



7.23 Solution : Le ressort étiré retour à la question ▲

W_{res} = -24,0 J

Le travail d'un ressort ne dépend que de son étirement initial et final, selon l'équation

$$W_{res} = -\tfrac{1}{2}k\left(x^2 - x_0^2\right)$$

L'étirement initial est nul car on indique que le ressort est au repos. Pour l'étirement final, on doit calculer la différence entre la longueur après étirement et la longueur au repos :

$$x = 142\text{ cm} - 80\text{ cm} \quad = \quad 62\text{ cm}$$

Le travail est donc :

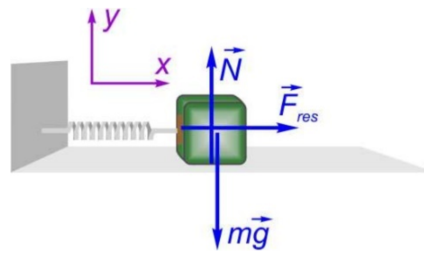
$$W_{res} = -\tfrac{1}{2}k\left(x^2 - x_0^2\right) \quad = \quad -\tfrac{1}{2}\times 125\,\tfrac{\text{N}}{\text{m}}\times\left((0{,}62\text{ m})^2 - (0\text{ m})^2\right) \quad = \quad -24{,}0\text{ J}$$

7.5 LE THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE

7.24 Solution : La catapulte retour à la question ▲

a) a = 44,4 m/s²

On doit faire une analyse des forces pour déterminer l'accélération de la masse. Le diagramme des forces est reproduit ci-contre. L'équation des forces selon x suffit pour évaluer l'accélération :



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{F}_{res} + \vec{N} + m\vec{g}$$

$$\sum F_x = ma_x = F_{res}$$

On peut utiliser la loi de Hooke pour évaluer la force du ressort en fonction de son étirement :

$$F_{res} = -kx_{res}\,,$$

l'étirement du ressort étant négatif (une compression vers la gauche) : x_{res} = -25 cm

On peut isoler et calculer l'accélération :

$$a_x = \frac{F_{res}}{m} \quad = \quad \frac{-kx_{res}}{m} \qquad (1)$$

$$a_x = \frac{-kx_{res}}{m} \quad = \quad \frac{-80\,\frac{\text{N}}{\text{m}}\times(-0{,}25\text{ m})}{0{,}450\text{ kg}} \quad = \quad 44{,}4\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

b) a = 17,8 m/s²

La compression différente entraîne à elle seule une accélération différente de la masse. Le diagramme des forces est le même qu'en a). On peut donc reprendre l'équation (1) pour calculer la nouvelle accélération :

$$a_x = \frac{-kx_{res}}{m} \quad = \quad \frac{-80\,\frac{\text{N}}{\text{m}}\times(-0{,}10\text{ m})}{0{,}450\text{ kg}} \quad = \quad 17{,}8\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

c) v = 3,33 m/s

L'accélération n'étant pas constante, on ne peut se servir des accélérations trouvées précédemment. On doit plutôt utiliser le théorème de l'énergie cinétique, l'énergie cinétique gagnée étant fournie par le travail du ressort :

$$\sum W \;= \Delta K$$

$$W_{res} + \underbrace{W_N}_{0} + \underbrace{W_g}_{0} \;= \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}m\underbrace{v_0^2}_{0}$$

1 à 11 12 à 24 25 à 38 39 à 47

La vitesse initiale est nulle selon l'énoncé. Les travaux de la force normale et de la force gravitationnelle sont nuls également car ces deux forces sont perpendiculaires au déplacement. Il ne reste donc que deux termes à l'équation :

$$W_{res} = \tfrac{1}{2}mv^2$$

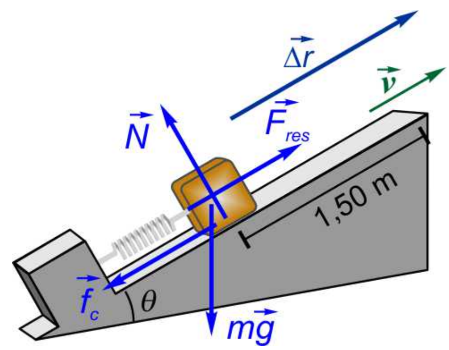
$$-\tfrac{1}{2}k\left(\underbrace{x^2}_{=0} - x_0^2\right) = \tfrac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{kx_0^2}{m}} = \sqrt{\frac{80\,\tfrac{\text{N}}{\text{m}} \times (0{,}25\,\text{m})^2}{0{,}450\,\text{kg}}} = 3{,}33\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

7.25 Solution : La rampe de lancement retour à la question ▲

v = 3,80 m/s

Description du mouvement : le ressort étant comprimé, il propulsera la masse vers le haut de la pente. Mais comme la masse n'est pas fixée au ressort, dès que l'extrémité de celui-ci atteindra sa position au repos, elle s'immobilisera et laissera la masse continuer sont chemin sans lui.



Un ressort étant impliqué, seul le théorème de l'énergie cinétique permet de calculer la vitesse de la masse au sommet de la rampe (l'accélération n'est pas constante durant la propulsion et les équations de cinématique à accélération constante ne peuvent pas être utilisées).

Quatre forces agissent sur la masse et effectuent éventuellement un travail (voir figure ci-contre). Seule la force normale effectue un travail nul car elle agit perpendiculairement au déplacement :

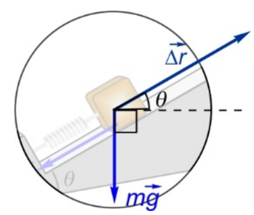
$$\sum W = \Delta K$$

$$W_{res} + \underbrace{W_N}_{0} + W_g + W_f = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}m\underbrace{v_0^2}_{0}$$

Si on développe chacun des termes :

$$\left(-\tfrac{1}{2}k\left(x^2 - x_0^2\right)\right) + \left(mg\Delta r \cdot \cos(90° + \theta)\right) + \left(f_c \Delta r \cdot \cos 180°\right) = \tfrac{1}{2}mv^2$$

L'angle $(90° + \theta)$ dans le calcul du travail de la force gravitationnelle est l'angle entre le vecteur $m\vec{g}$ et le vecteur $\Delta\vec{r}$ (voir figure ci-contre).



L'évaluation de la force de frottement statique requiert une analyse des forces. Selon l'axe y (perpendiculaire à la surface) :

$$\sum F_y = ma_y = N - mg\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg\cos\theta$$

Insérée dans l'équation principale :

$$\left(-\tfrac{1}{2}k\left(\underbrace{x^2}_{=0} - x_0^2\right)\right) + \left(mg\Delta r \cdot \cos(90° + \theta)\right) - \left(\mu_c\,(mg\cos\theta)\,\Delta r\right) = \tfrac{1}{2}mv^2$$

$$\tfrac{1}{2}kx_0^2 + mg\Delta r \cdot \cos(90° + \theta) - \mu_c mg\cos\theta\Delta r = \tfrac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{kx_0^2}{m} + 2g\Delta r\left(\cos(90° + \theta) - \mu_c\cos\theta\right)}$$

$$v = \sqrt{\frac{450\,\tfrac{\text{N}}{\text{m}} \times (0{,}38\,\text{m})^2}{2\,\text{kg}} + 2 \times 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 1{,}50\,\text{m} \times \left(\cos(90° + 25°) - 0{,}210 \times \cos 25°\right)} = 3{,}80\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

1 à 11 12 à 24 25 à 38 39 à 47

7.26 Solution : Accélérée par le travail retour à la question ▲

v = 17,3 m/s

Selon le théorème de l'énergie cinétique, le travail total est égal au gain d'énergie cinétique d'une masse :

$$\sum W = \Delta K$$

On donne le travail total, et il ne reste qu'à utiliser la masse et la vitesse fournie pour évaluer la vitesse finale, après l'avoir isolé dans l'équation développée :

$$W_{total} = K - K_0 \quad = \quad \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 \quad = \quad \tfrac{1}{2}m\left(v^2 - v_0^2\right)$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2W_{total}}{m}} \quad = \quad \sqrt{\left(2{,}25\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \frac{2\times 5\,570\text{ J}}{38\text{ kg}}} \quad = \quad 17{,}3\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

7.27 Solution : Le conteneur retour à la question ▲

W_{total} = 3,99×10⁵ J

On mentionne bien l'ensemble des forces décrites et non seulement le travail de la grue. On ignore la valeur de chacun de ces forces, en plus du fait qu'elles sont nombreuses et complexes, sur l'ensemble du déplacement (par exemple, la force normale de la surface sur laquelle le conteneur est déposée et freiné dans sa descente est inconnue). On peut cependant utiliser le théorème de l'énergie cinétique, qui contient en un seul terme le travail total de toutes les forces.

Le théorème de l'énergie cinétique n'exige pas de quantifier chaque force, et ne considère que le module des vitesses initiale et finale, sans égard à la direction. Selon l'équation générale on développera les termes d'énergie cinétique, on a :

$$\sum W = \Delta K$$

$$\sum W = K - K_0 \quad = \quad \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}m\underbrace{v_0^2}_{=0} \quad = \quad \tfrac{1}{2}mv^2$$

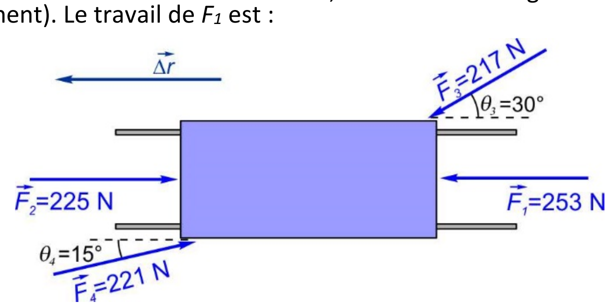
$$\sum W = \tfrac{1}{2}\times 29{,}5\times 10^3\text{ kg}\times\left(5{,}20\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \quad = \quad 3{,}99\times 10^5\text{ J}$$

7.28 Solution : Le plus fort retour à la question ▲

a) W_1 = 1 265 J, W_2 = -1 125 J, W_3 = 940 J, W_4 = -1 067 J

La figure montre un déplacement vers la gauche. Si on calcule d'abord le travail de la force F_1, orientée vers la gauche également, on utilisera un angle de 0° (force parallèle au déplacement). Le travail de F_1 est :

$$W_1 = F_1\Delta r\cos 0° \quad = \quad 253\text{ N}\times 5{,}00\text{ m}\times\cos 0° \quad = \quad 1\,265\text{ J}$$



Pour la force F_2, l'angle entre force et déplacement est de 180° :

$$W_2 = F_2\Delta r\cos 0° \quad = \quad 225\text{ N}\times 5{,}00\text{ m}\times\cos 180° \quad = \quad -1\,125\text{ J}$$

Pour la force F_3, l'angle entre force et déplacement est de 30° :

$$W_3 = F_3\Delta r\cos 30° \quad = \quad 217\text{ N}\times 5{,}00\text{ m}\times\cos 30° \quad = \quad 940\text{ J}$$

Pour la force F_4, l'angle entre force et déplacement est de 165° :

$$W_4 = F_4\Delta r\cos 165° \quad = \quad 221\text{ N}\times 5{,}00\text{ m}\times\cos 165° \quad = \quad -1\,067\text{ J}$$

b) v = 0,561 m/s

La vitesse peut être trouvée en utilisant le théorème de l'énergie cinétique :

$$\sum W = \Delta K \quad = \quad K - K_0 \quad = \quad \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}m\underbrace{v_0^2}_{=0} \quad = \quad \tfrac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2\sum W}{m}} \quad = \quad \sqrt{\frac{2\times\left(1\,265\text{ J}+\left(-1\,125\text{ J}\right)+940\text{ J}+\left(-1\,067\text{ J}\right)\right)}{78\text{ kg}}} \quad = \quad 0{,}561\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

7.29 Solution : Le plan incliné retour à la question ▲

Δr = 0,389 m

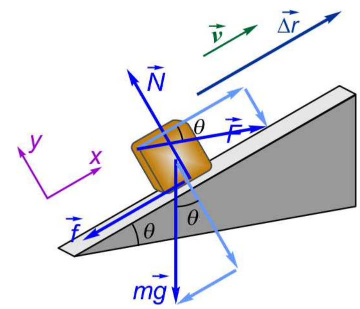
Plusieurs forces agissent sur le bloc durant son déplacement et le travail total de ces forces entraîne une variation de vitesse. Le déplacement requis pour atteindre la vitesse de 3,00 m/s intervient dans le calcul du travail de chacun des forces. À partir du théorème de l'énergie cinétique, on a :

$$\sum W = \Delta K$$

4 forces agissent sur le bloc durant son déplacement (F, F_g, f_c et N). On peut développer l'équation selon ces 4 forces :

$$W_F + W_g + W_f + W_N = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}m\underbrace{v_0^2}_{=0}$$

La force normale étant perpendiculaire au déplacement, son travail sera nul. Les autres forces effectuent un travail lié à leur module et au déplacement recherché Δr :



$$F\Delta r\cos\theta + mg\Delta r\cos\Big(\underbrace{90° + \theta}_{=102{,}5°}\Big) + f_c\Delta r\underbrace{\cos 180°}_{=-1} + 0 = \tfrac{1}{2}mv^2$$

$$F\Delta r\cos\theta + mg\Delta r\cos(102{,}5°) - f_c\Delta r = \tfrac{1}{2}mv^2 \qquad (1)$$

La force de frottement f_c étant inconnue, on doit l'exprimer en fonction du coefficient de frottement cinétique et de la force normale, ce qui exige une analyse des forces. Selon l'axe y (perpendiculaire à la surface) :

$$\sum F_y = m\underbrace{a_y}_{=0} = N - mg\cos\theta - F\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg\cos\theta + F\sin\theta$$

En insérant cette expression de N dans l'équation (1) , avec $f_c = \mu_c N$, on obtient une équation où Δr est la seule inconnue :

$$F\Delta r\cos\theta + mg\Delta r\cos(102{,}5°) - \mu_c\left(mg\cos\theta + F\sin\theta\right)\Delta r = \tfrac{1}{2}mv^2$$

On peut alors mettre Δr en évidence, l'isoler et calculer :

$$\Delta r\left(F\cos\theta + mg\cos(102{,}5°) - \mu_c\left(mg\cos\theta + F\sin\theta\right)\right) = \tfrac{1}{2}mv^2$$

$$\Delta r = \frac{mv^2}{2\left(F\cos\theta + mg\cos(102{,}5°) - \mu_c\left(mg\cos\theta + F\sin\theta\right)\right)}$$

$$\Delta r = \frac{1{,}5\,\text{kg}\times\left(3{,}00\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2\times\left(25\,\text{N}\times\cos 12{,}5° + 1{,}5\,\text{kg}\times 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\times\cos(102{,}5°) - 0{,}195\times\left(1{,}5\,\text{kg}\times 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\times\cos 12{,}5° + 25\,\text{N}\times\sin 12{,}5°\right)\right)} = 0{,}389\,\text{m}$$

7.30 Solution : Le ski retour à la question ▲

a) v = 11,3 m/s

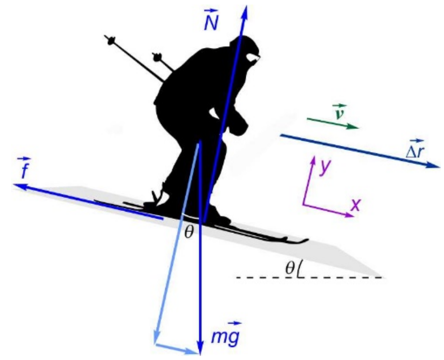
Lorsque le skieur glisse librement sur une pente, trois forces agissent sur lui : la force gravitationnelle, la force normale et la force de frottement cinétique. Le travail total de ces forces, sur la distance de 120 m, entraînera une variation de la vitesse du skieur, selon l'équation du théorème de l'énergie cinétique :

$$\sum W = \Delta K$$

$$W_g + W_f + W_N = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2$$

1 à 11 12 à 24 25 à 38 39 à 47

Si on développe les trois termes de travail (avec un travail nul pour la force normale, celle-ci étant perpendiculaire au déplacement) :



$$mg\Delta r\cos\Big(\underbrace{90°-\theta}_{=83,3°}\Big)+f_c\Delta r\underbrace{\cos 180°}_{=-1}+0 \quad =\tfrac{1}{2}mv^2-\tfrac{1}{2}mv_0^2$$

$$mg\Delta r\cos(83,3°)-f_c\Delta r \quad =\tfrac{1}{2}mv^2-\tfrac{1}{2}mv_0^2 \qquad (1)$$

La force de frottement f_c étant inconnue, on doit l'exprimer en fonction du coefficient de frottement cinétique et de la force normale, ce qui exige une analyse des forces. Selon l'axe y (perpendiculaire à la surface) :

$$\sum F_y = m\underbrace{a_y}_{=0} = N - mg\cos\theta \;=\; 0 \qquad \Rightarrow \qquad N = mg\cos\theta$$

En insérant cette expression de N dans l'équation (1), avec $f_c = \mu_c N$, on obtient une équation où la vitesse finale v est la seule inconnue :

$$mg\Delta r\cos(83,3°)-\mu_c\left(mg\cos\theta\right)\Delta r \quad =\tfrac{1}{2}mv^2-\tfrac{1}{2}mv_0^2$$

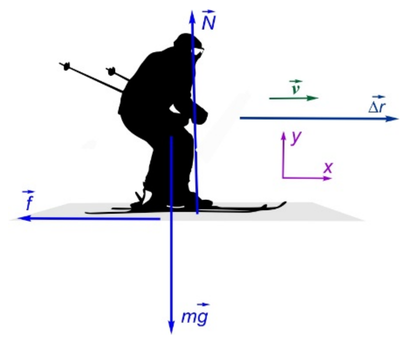
La masse étant dans tous les termes, on peut l'éliminer. La vitesse finale est :

$$v=\sqrt{\frac{2\times\left(\tfrac{1}{2}mv_0^2+mg\Delta r\cos(83,3°)-\mu_c\left(mg\cos\theta\right)\Delta r\right)}{m}} \;=\; \sqrt{v_0^2+2g\Delta r\left(\cos 83,3°-\mu_c\cos\theta\right)}$$

$$v=\sqrt{\left(4,25\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2+2\times 9,81\,\tfrac{\text{N}}{\text{kg}}\times 120\,\text{m}\left(\cos 83,3°-0,071\times\cos 6,7°\right)} \;=\; 11,3\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) d = 91,0 m

En glissant sur une surface horizontale, le frottement finira par immobiliser le skieur. Sa vitesse au début de cette portion est celle trouvée en a). Si on procède par le théorème de l'énergie cinétique, alors le travail total (qui se limitera à celui du frottement) fera perdre toute l'énergie cinétique du skieur :



$$\sum W \quad = \Delta K$$

$$\underbrace{W_g}_{=0}+W_f+\underbrace{W_N}_{=0} \quad =\tfrac{1}{2}m\underbrace{v^2}_{=0}-\tfrac{1}{2}mv_0^2$$

Si on développe les trois termes de travail (avec un travail nul pour la force normale et la force gravitationnelle, celles-ci étant perpendiculaires au déplacement) :

$$0+f_c\Delta r\underbrace{\cos 180°}_{=-1}+0 \quad = 0-\tfrac{1}{2}mv_0^2$$

$$-\mu_c N\Delta r \quad = -\tfrac{1}{2}mv_0^2$$

La force de frottement cinétique, toujours égale à $\mu_c N$, exige de déterminer la force normale pour cette nouvelle situation. L'équation des forces en y sur le skieur est :

$$\sum F_y = m\underbrace{a_y}_{=0} = N - mg \;=\; 0 \qquad \Rightarrow \qquad N = mg$$

On peut donc développer l'équation du théorème de l'énergie cinétique :

$$-\mu_c\left(mg\right)\Delta r \quad = -\tfrac{1}{2}mv_0^2$$

et on peut finalement isoler et calculer le déplacement Δr :

$$\Delta r \quad = \frac{v_0^2}{2\mu_c g} \;=\; \frac{\left(11,3\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2\times 0,071\times 9,81\,\tfrac{\text{N}}{\text{kg}}} \;=\; 91,0\,\text{m}$$

7.6 LA PUISSANCE

7.31 Solution : La puissance d'une force retour à la question ▲

P = 658 W

La masse gagne de l'énergie cinétique dans un temps connu. On peut alors calculer la puissance par :

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}mv^2 - \overbrace{\frac{1}{2}mv_0^2}^{=0}}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}\times 15\text{ kg}\times\left(\frac{50}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - 0}{2{,}2\text{ s}} = 658\text{ W}$$

7.32 Solution : Le monte-charge retour à la question ▲

$P = 7{,}36\times10^3$ W

Pour une force constante permettant de maintenir une vitesse constante, la puissance peut être donnée par :

$$P = F\cdot v$$

On doit donc évaluer la force du moteur quand la charge monte à vitesse constante (accélération nulle). Par une analyse des forces où on appellera T la tension des câbles par lesquels le moteur soulève le monte-charge, on trouve :

$$\sum\vec{F} = m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g} = 0$$

$$\sum F_y = ma_y = T + mg = 0 \quad \rightarrow \quad T = mg$$

La puissance est donc :

$$P = F\cdot v = mg\cdot v = 1\,250\text{ kg}\times 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\times 0{,}60\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 7{,}36\times10^3\text{ W}$$

7.33 Solution : La trottinette retour à la question ▲

F = 126 N

Une équation de la puissance contient le travail et on peut exprimer ce travail en fonction de la force et du déplacement :

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{F\cdot\Delta r}{\Delta t}$$

$$F = \frac{P\cdot\Delta t}{\Delta r} = \frac{450\text{ W}\times 28\text{ s}}{100\text{ m}} = 126\text{ N}$$

7.34 Solution : La rampe de lancement #2 retour à la question ▲

P_{res} = 309 W

La puissance est donnée par :

$$P = \frac{W}{\Delta t}$$

Le travail du ressort est donné par :

$$W_{res} = -\tfrac{1}{2}k\left(x^2 - x_0^2\right)$$

La puissance du ressort est donc :

[1 à 11](#) [12 à 24](#) [25 à 38](#) [39 à 47](#)

$$P_{res} = \frac{-\frac{1}{2}k\left(\overbrace{x^2}^{=0} - x_0^2\right)}{\Delta t} = \frac{kx_0^2}{2\Delta t} = \frac{450\,\frac{\text{N}}{\text{m}} \times (0{,}38\,\text{m})^2}{2 \times 0{,}105\,\text{s}} = 309\ \text{W}$$

7.8 LA CONSERVATION DE L'ÉNERGIE

7.35 Solution : Professor Splash retour à la question ▲

v = 14,7 m/s

Lors de son saut, si on néglige la résistance de l'air, aucune force non conservative n'agit; il n'y a donc aucune perte d'énergie mécanique. On peut donc écrire :

$$E_f = E_i + \underbrace{W_{nc}}_{=0}$$

Si on développe chaque terme :

$$K_f + \underbrace{U_{gf}}_{=0} = \underbrace{K_i}_{=0} + U_{gi} + 0$$

L'énergie cinétique initiale est nulle car il se laisse tomber à partir du repos, et l'énergie potentielle gravitationnelle finale est nulle si on prend comme référence de hauteur la surface de l'eau, 11 m sous son point de chute. En développant les termes restants :

$$\tfrac{1}{2}mv_f^2 = mgy_i$$

On peut simplifier par m puisqu'elle est dans les deux termes. On isole ensuite la vitesse v_f :

$$v_f = \sqrt{2gy_f} = \sqrt{2 \times 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 11\,\text{m}} = 14{,}7\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

7.36 Solution : Le plan incliné retour à la question ▲

a) d = 7,62 cm

S'il n'y a pas de frottement, il n'y a aucune force non conservative et l'énergie mécanique sera conservée. L'équation de la conservation de l'énergie est :

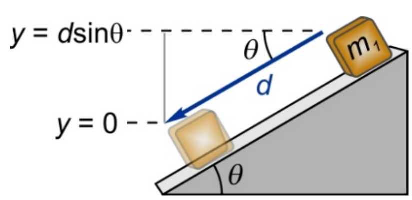
$$E = E_0 + \underbrace{W_{nc}}_{=0}$$

$$K + U_g = K_0 + U_{g0}$$

Si la masse part du repos, l'énergie cinétique initiale est nulle. On peut placer son référentiel de hauteur vis-à-vis sa position finale, ce qui annule U_g. Si on développe les termes restants :

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mgy_0$$

Appelons d la distance parcourue le long de la surface. On constante que m est dans tous les termes et peut être rayée. La hauteur initiale y_0 est liée à l'inclinaison et à la distance parcourue (voir figure ci-contre) par :



$$y_0 = d\sin\theta$$

$$\tfrac{1}{2}v^2 = gd\sin\theta$$

$$d = \frac{v^2}{2g\sin\theta} = \frac{\left(1{,}00\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \times 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times \sin 42°} = 0{,}0762\,\text{m}$$

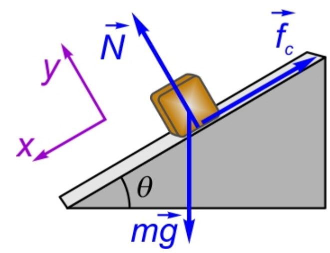
b) d = 10,4 cm

S'il y a du frottement lors du glissement, on devra développer le terme W_{nc}. Comme en a), l'énergie cinétique initiale et l'énergie potentielle gravitationnelle finale sont nulles :

$$E = E_0 + W_{nc}$$

$$K + \underbrace{U_g}_{=0} = \underbrace{K_0}_{=0} + U_{g0} + W_f$$

La figure ci-contre montre les forces agissant sur la masse durant le mouvement, permettant d'établir une expression de la force normale et donc de la force de frottement.



$$\sum F_y = m\underbrace{a_y}_{=0} = N - mg\cos\theta = 0 \quad \rightarrow \quad N = mg\cos\theta$$

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mgy_0 + f_c d\cos 180°$$

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mgy_0 + \mu_c mg\cos\theta \cdot d \cdot (-1)$$

La hauteur y_0 peut comme en a) être remplacée par $d\sin\theta$. À nouveau la masse est partout et peut être rayée. Si on isole la distance d, qui apparaît dans deux termes :

$$\tfrac{1}{2}v^2 = g(d\sin\theta) - \mu_c g\cos\theta \cdot d$$

$$d = \frac{v^2}{2g(\sin\theta - \mu_c\cos\theta)}$$

$$d = \frac{(1{,}00\,\tfrac{m}{s})^2}{2\times 9{,}81\,\tfrac{m}{s^2}\times(\sin 42° - 0{,}240\times\cos 42°)} = 0{,}104\text{ m}$$

7.37 Solution : Masse-ressort retour à la question ▲

v = 3,00 m/s

On doit d'abord identifier l'endroit pour lequel on calculera la vitesse. Dès qu'on lâchera la masse, elle sera accélérée par le ressort jusqu'à la position d'équilibre du système (où le ressort est au repos). Au-delà de ce point, le ressort deviendra étiré, et donc fera ralentir la masse. C'est donc au centre des oscillations que la masse se déplacera le plus rapidement, là où le ressort est au repos. En l'absence de frottement, on peut écrire :

$$E = E_0 + \underbrace{W_{nc}}_{=0}$$

Puisque le mouvement est horizontal, aucune énergie potentielle gravitationnelle ne sera impliquée (si la hauteur nulle correspond à la hauteur de la masse). Si l'instant final est celui où la vitesse est maximale, c'est aussi l'instant où le ressort n'a plus aucune énergie. Initialement, on lâche la masse alors qu'elle est au repos. L'équation devient donc :

$$K + \underbrace{U_é}_{=0} = \underbrace{K_0}_{=0} + U_{é0}$$

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}kx^2$$

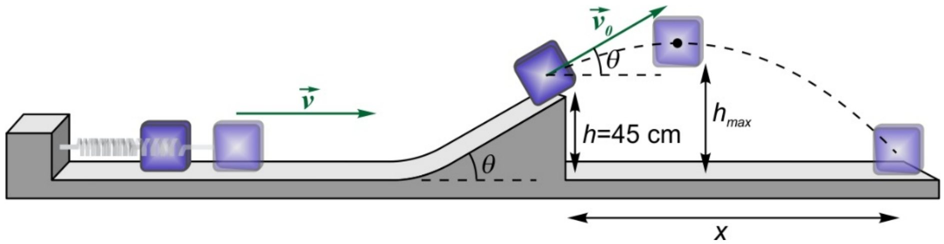
L'étirement initial du ressort est x = -0,15 m :

$$v = \sqrt{\frac{kx^2}{m}} = \sqrt{\frac{300\,\tfrac{N}{m}\times(-0{,}15\text{ m})^2}{0{,}750\text{ kg}}} = 3{,}00\,\tfrac{m}{s}$$

7.38 Solution : Le saut retour à la question ▲

a) v = 5,92 m/s

1 à 11 12 à 24 25 à 38 39 à 47



Cette portion du problème est identique au numéro précédent « Masse-ressort ». Dès qu'on lâchera la masse, elle sera accélérée par le ressort jusqu'à la position d'équilibre du système (où le ressort est au repos). Au-delà de ce point, la masse quittera le ressort puisqu'elle n'y est pas fixée, et sa vitesse demeurera constante (en l'absence de frottement). On peut écrire :

$$E = E_0 + \underbrace{W_{nc}}_{=0}$$

Puisque le mouvement est horizontal, aucune énergie potentielle gravitationnelle ne sera impliquée (si la hauteur nulle correspond à la hauteur de la masse). Si l'instant final est celui où on cherche la vitesse, c'est aussi l'instant où le ressort n'a plus aucune énergie. Initialement, on lâche la masse alors qu'elle est au repos. L'équation devient donc :

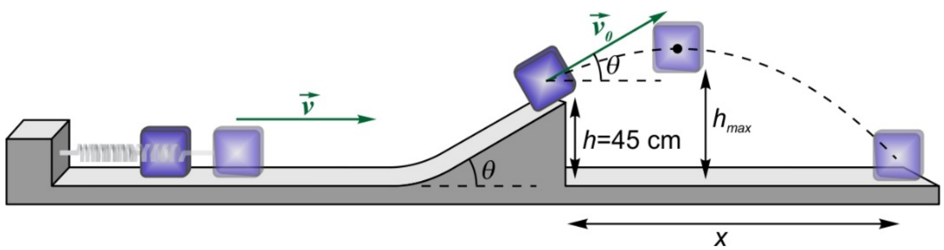
$$K + \underbrace{U_é}_{=0} = \underbrace{K_0}_{=0} + U_{é0}$$

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}kx^2$$

L'étirement initiale du ressort est x = -0,40 m :

$$v = \sqrt{\frac{kx^2}{m}} = \sqrt{\frac{175\,\frac{\text{N}}{\text{m}} \times (-0,40\,\text{m})^2}{0,800\,\text{kg}}} = 5,92\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) v = 5,12 m/s



Lors de la montée du plan incliné, une partie de l'énergie cinétique de la masse se transforme en énergie potentielle gravitationnelle. La masse parvient au bas du plan incliné à la vitesse trouvée en a), et il n'y a toujours pas de frottement durant la montée. Pour la phase de la montée, l'équation est :

$$E = E_0 + \underbrace{W_{nc}}_{=0}$$

$$K + U_g = K_0 + \underbrace{U_{g0}}_{=0}$$

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + mgy = \tfrac{1}{2}mv_0^2$$

On peut simplifier par m tous les termes, et la hauteur de la masse en haut du plan incliné est directement la hauteur donnée du sommet du plan incliné, y = 0,45 m. On cherche la vitesse finale v :

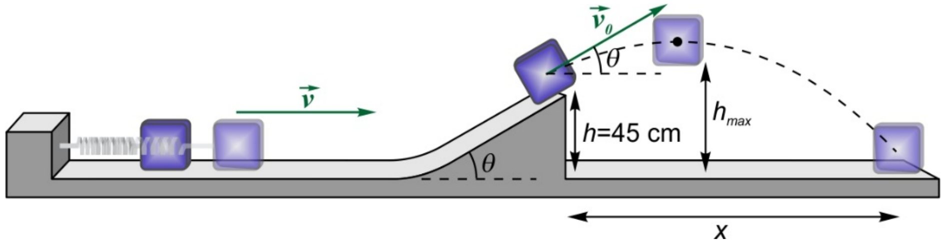
$$\tfrac{1}{2}v^2 + gy = \tfrac{1}{2}v_0^2$$

$$v = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}v_0^2 - gy}{\frac{1}{2}}} = \sqrt{v_0^2 - 2gy}$$

$$v = \sqrt{\left(5,92\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - 2 \times 9,81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 0,45\,\text{m}} = 5,12\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

c) h_{max} = 0,783 m

Le bloc devient un projectile dès qu'il dépasse le sommet du plan incliné. Sa vitesse, calculée en b), est orientée comme la surface du plan incliné. C'est donc un problème de cinématique dès ce moment, la masse est un projectile. La hauteur maximale correspond à la hauteur où la vitesse verticale est nulle. Les paramètres et équations, du somme de la pente jusqu'au sommet de la trajectoire, sont :



$x_0 = 0$	$y_0 = 0{,}45\,\text{m}$
$x = ?$	$y = ??$
$v_{x0} = v_0 \cos\theta$	$v_{y0} = v_0 \sin\theta$
$v_x = v_{x0}$	$v_y = 0$
$a_x = 0$	$a_y = -g$

$t = ?$

$x = x_0 + v_{x0}t \qquad y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2$

$v_y = v_{y0} + a_y t$

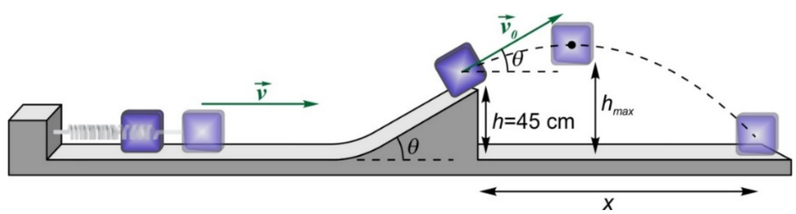
Les deux équations selon y permettront de trouver la hauteur où $v_y = 0$. Cela revient à utiliser l'équation des vitesses carrées :

$$\underbrace{v_y^2}_{=0} = v_{y0}^2 + 2\underbrace{a_y}_{=-g}(y - y_0) \quad \rightarrow \quad 0 = v_{y0}^2 - 2g(y - y_0)$$

$$y = y_0 + \frac{v_{y0}^2}{2g} = y_0 + \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} = 0{,}45\,\text{m} + \frac{\left(5{,}12\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \times \sin^2 30°}{2 \times 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0{,}783\,\text{m}$$

d) $x = 2{,}93$ m

On peut utiliser les mêmes paramètres de départ qu'en c), mais l'instant final est celui où la masse retouche au sol, et on cherche x :



$x_0 = 0$	$y_0 = 0{,}45\,\text{m}$
$x = ?$	$y = 0$
$v_{x0} = v_0 \cos\theta$	$v_{y0} = v_0 \sin\theta$
$v_x = v_{x0}$	$v_y = ?$
$a_x = 0$	$a_x = -g$

$t = ?$

$x = x_0 + v_{x0}t \qquad y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2$

$v_y = v_{y0} + a_y t$

En insérant certaines valeurs dans les deux équations de position pour les fusionner :

$$x = 0 + v_0 \cos\theta \cdot t \qquad \underbrace{y}_{=0} = y_0 + v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

Selon l'équation en x :

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$

En insérant cette expression de t dans l'équation de la position en y =

$$0 = y_0 + v_0 \sin\theta \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right) - \tfrac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right)^2 \quad = \quad y_0 + \tan\theta \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} x^2$$

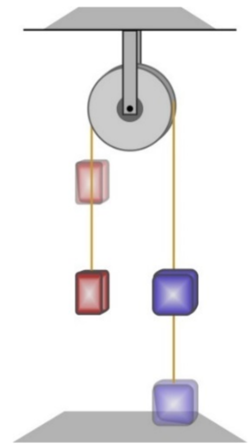
$$-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} x^2 + \tan\theta \cdot x + y_0 = 0$$

On doit appliquer la solution d'équation quadratique, qui donne deux solutions : x_1 = -0,615 m et x_2 = 2,93 m.
On cherche nécessairement une solution positive, car on a considéré une position x = 0 vis-à-vis le sommet du plan incliné.
Donc x = 2,93 m

7.39 Solution : Masses et poulie #1

retour à la question ▲

v = 1,57 m/s



En l'absence de frottement, l'énergie mécanique sera conservée :

$$E = E_0 + \underbrace{W_{nc}}_{=0}$$

Puisqu'il y a deux masses, l'énergie comporte deux énergies cinétiques et deux énergies potentielles gravitationnelles. Appelons A et B les positions initiale et finale du système :

$$K_{1A} + K_{2A} + U_{g1A} + U_{g2A} = K_{1B} + K_{2B} + U_{g1B} + U_{g2B} + 0$$

Puisqu'on connaît la hauteur de chacune des masses au-dessus du sol, on peut choisir le sol comme référence de hauteur. Les deux hauteurs initiales sont alors $y_{1A} = y_{2A}$ = 50 cm, et l'une terminera sa course au sol (la masse 2, puisqu'elle est plus lourde) (y_{2B} = 0), et l'autre terminera sa course à y_{1B} = 100 cm. Aussi, le système part du repos. Les termes restants sont :

$$U_{g1A} + U_{g2A} = K_{1B} + K_{2B} + U_{g1B}$$

$$m_1 g y_{1A} + m_2 g y_{2A} = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1B}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2B}^2 + m_1 g y_{1B}$$

La vitesse étant commune, on peut la nommer v et l'isoler :

$$v = \sqrt{\frac{g\left(m_1 y_{1A} + m_2 y_{2A} - m_1 y_{1B}\right)}{\tfrac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)}}$$

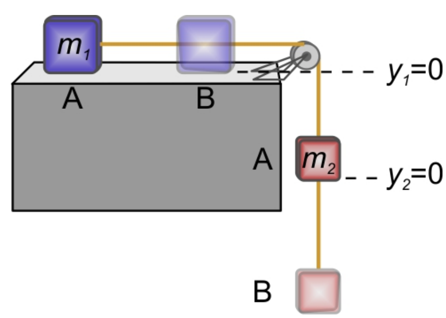
$$= \sqrt{\frac{9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \times \left(1{,}50\text{ kg} \times 0{,}50\text{ m} + 2{,}50\text{ kg} \times 0{,}50\text{ m} - 1{,}50\text{ kg} \times 1{,}00\text{ m}\right)}{\tfrac{1}{2} \times \left(1{,}50\text{ kg} + 2{,}50\text{ kg}\right)}}$$

$$= 1{,}57\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

7.40 Solution : Masses et poulie #2

retour à la question ▲

d = 10,2 cm



L'équation de départ qui lie les énergies initiale et finale, en l'absence de frottement, est :

$$E_B = E_A + \underbrace{W_{nc}}_{=0}$$

Le tout part du repos, et on peut choisir pour référence de hauteur pour chaque masse sa hauteur initiale. En développant les énergies initiale et finale, et en rayant les termes nuls, on a :

$$K_{1B} + K_{2B} + \underbrace{U_{g1B}}_{=0} + U_{g2B} = \underbrace{K_{1A} + K_{2A}}_{=0} + \underbrace{U_{g1A}}_{=0} + \underbrace{U_{g2A}}_{=0}$$

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_{1B}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2B}^2 + m_2 g y_{2B} = 0$$

La vitesse étant commune aux deux masses, on peut poser $v_{1B} = v_{2B} = v$, et les masses étant identiques, on peut poser $m_1 = m_2 = m$. La hauteur y_{2B} étant la seule inconnue, on peut l'isoler et la calculer :

1 à 11 12 à 24 25 à 38 39 à 47

$$\tfrac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 = -m_2 g y_{2B}$$

$$\tfrac{1}{2}(m+m)v^2 = -m g y_{2B}$$

$$\tfrac{1}{2}(2m)v^2 = -m g y_{2B}$$

$$y_{2B} = \frac{v^2}{-g} = \frac{\left(1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{-9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = -0{,}102\,\text{m}$$

La masse m_2 descend de 10,2 cm. La distance parcourue par les deux masses est donc de 10,2 cm.

7.41 Solution : Masses et poulie #3 retour à la question ▲

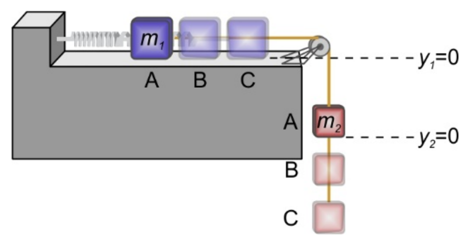
a) x_{res} = 4,81 cm

On peut identifier les différentes positions du système qui seront traitées en a) et b) (voir figure ci-contre). Le système part de la position A, c'est la position initiale. En a), on s'intéresse à l'étirement maximal du ressort, qui correspond aussi au déplacement maximal des masses avant d'inverser leur mouvement. C'est donc la position C. L'équation de départ qui lie les énergies initiale et finale est donc :

$$E_C = E_A + W_{nc}$$

Il y a du frottement cinétique, donc le travail des forces non conservatives devra être calculé. En développant les termes, en fonction du fait qu'il y a 2 masses et 1 ressort, on obtient :

$$\underbrace{K_{1C}+K_{2C}}_{=0} + \underbrace{U_{g1C}}_{=0} + U_{g2C} + U_{éC} = \underbrace{K_{1A}+K_{2A}}_{=0} + \underbrace{U_{g1A}}_{=0} + \underbrace{U_{g2A}}_{=0} + \underbrace{U_{éA}}_{=0} + W_f$$

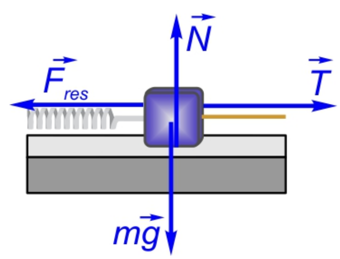


Dans la position A, le système est immobile et les énergies cinétiques sont nulles. Le ressort est au repos ($U_{éA}$ = 0). Les références de hauteur pour chaque masse peuvent être la hauteur initiale, faisant en sorte que les deux énergies potentielles gravitationnelles sont nulles.

À la fin du mouvement, les masses s'immobilisent à nouveau avant d'inverser leur mouvement. Les énergies cinétiques sont donc nulles. La masse 1 étant à la même hauteur qu'au départ, sont énergie potentielle gravitationnelle est encore nulle. Les termes restants et qu'on développera sont :

$$U_{g2C} + U_{éC} = W_f$$

$$m_2 g y_{2C} + \tfrac{1}{2}kx_C^2 = f_c \Delta r \cos 180°$$



Le déplacement Δr coïncide avec l'étirement du ressort x_C, alors que la hauteur finale de la masse 2, y_{2C} est négative et de même grandeur, donc y_{2C} = ($-x_C$).

On doit aussi développer la force de frottement cinétique, donnée par $f_c = \mu_c N$. La figure ci-contre montre que les deux seules forces verticales sont la force normale et la force gravitationnelle. Selon les équations des forces :

$$\sum F_y = m_2 \underbrace{a_y}_{=0} = N - m_2 g = 0 \quad \rightarrow \quad N = m_2 g$$

$$m_2 g(-x_C) + \tfrac{1}{2}kx_C^2 = (\mu_c m_1 g)x_C \times (-1)$$

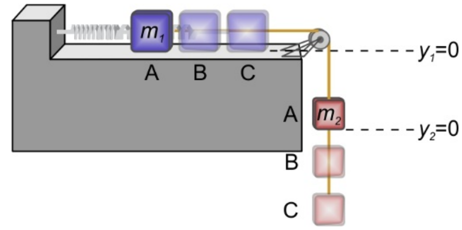
Il ne reste qu'à isoler et calculer x_C, ce qu'on peut faire après avoir simplifié par x_C une fois :

$$-m_2 g + \tfrac{1}{2}kx_C = -\mu_c m_1 g$$

$$x_C = \frac{2g(m_2 - \mu_c m_1)}{k}$$

$$x_C = \frac{2 \times 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times (0{,}400\,\text{kg} - 0{,}270 \times 0{,}800\,\text{kg})}{75\,\frac{\text{N}}{\text{m}}} = 0{,}0481\,\text{m}$$

1 à 11 12 à 24 25 à 38 39 à 47



b) v = 0,190 m/s

On cherche la vitesse maximale et on indique qu'elle survient à mi-chemin de la distance trouvée en a). On travaillera donc avec une position x_B = 4,81 cm÷2 = 2,41 cm. C'est la position représentée par B sur la figure (ci-contre). On peut partir de la même position initiale (A) qu'en a). L'équation liant les énergies en A et B, où on annulera les plusieurs termes, est :

$$E_B = E_A + W_{nc}$$

$$K_{1B} + K_{2B} + \underbrace{U_{g1B}}_{=0} + U_{g2B} + U_{éB} = \underbrace{K_{1A} + K_{2A}}_{=0} + \underbrace{U_{g1A}}_{=0} + \underbrace{U_{g2A}}_{=0} + \underbrace{U_{éA}}_{=0} + W_f$$

La force de frottement cinétique s'exprime de la même manière qu'en a), donc :

$$\tfrac{1}{2}m_1v_{1B}^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_{2B}^2 + m_2gy_{2B} + \tfrac{1}{2}kx_B^2 = (\mu_c m_1 g)x_B \times \cos 180°$$

On cherche la vitesse, commune aux deux masses, alors on peut poser $v_{1B} = v_{2B} = v$. Aussi, la hauteur en B de m_2 est encore négative et liée au déplacement x_B par $y_{2B} = -x_B$.

$$\tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + m_2g(-x_B) + \tfrac{1}{2}kx_B^2 = -\mu_c m_1 g x_B$$

$$v = \sqrt{\frac{2gx_B(m_2 - \mu_c m_1) - kx_B^2}{m_1 + m_2}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2\times 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\times 0{,}0241\,\text{m}\times(0{,}400\,\text{kg}\times -0{,}270\times 0{,}800\,\text{kg}) - 75\,\tfrac{\text{N}}{\text{m}}\times(0{,}0241\,\text{m})^2}{0{,}400\,\text{kg}+0{,}800\,\text{kg}}} = 0{,}190\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

7.42 Solution : Le caillou

retour à la question ▲

a) v = 19,1 m/s

Par conservation de l'énergie, et en l'absence de frottement et de résistance de l'air, on peut écrire

$$E = E_0 + W_{nc}\,,$$

où E est l'énergie au bas de la falaise, et E_0 l'énergie initiale, en haut de la falaise, au moment du lancer :

$$K + \underbrace{U_g}_{=0} = K_0 + U_{g0} + \underbrace{W_{nc}}_{=0}$$

L'énergie potentielle gravitationnelle finale est nulle si on considère une référence de hauteur au bas de la falaise. L'équation réduite où on développera les termes est :

$$K = K_0 + U_{g0}$$

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}mv_0^2 + mgy_0$$

On peut alors simplifier et isoler la vitesse finale v :

$$\tfrac{1}{2}v^2 = \tfrac{1}{2}v_0^2 + gy_0$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gy_0}$$

On constate alors que le module de la vitesse finale du caillou au bas de la falaise est indépendant de l'angle de projection. On peut alors calculer une vitesse que sera la même en module pour les 3 parties a), b) et c) :

$$v = \sqrt{\left(13{,}0\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + 2\times 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\times 10\,\text{m}} = 19{,}1\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) v = 19,1 m/s

L'équation de la vitesse obtenue en a) s'applique de la même manière même si l'angle de projection est différent, car seuls les modules des vitesses initiale et finale sont impliqués. La vitesse finale sera donc la même :

$$v=\sqrt{v_0^2+2gy_0} \quad = \quad \sqrt{\left(13{,}0\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2+2\times 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\times 10\text{ m}} \quad = \quad 19{,}1\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

c) v = 19,1 m/s

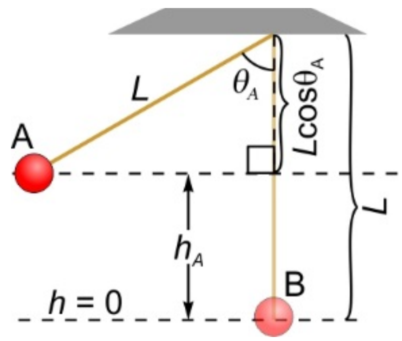
À nouveau, l'équation de la vitesse obtenue en a) s'applique de la même manière même si l'angle de projection est différent, car seuls les modules des vitesses initiale et finale sont impliqués. La vitesse finale sera donc une autre fois la même :

$$v=\sqrt{v_0^2+2gy_0} \quad = \quad \sqrt{\left(13{,}0\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2+2\times 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\times 10\text{ m}} \quad = \quad 19{,}1\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

7.43 Solution : Le pendule [retour à la question ▲](#)

a) 2,80 m/s

Puisqu'on néglige la résistance de l'air, aucune force ne fait perdre de l'énergie au pendule durant sa descente. Il y a donc conservation de l'énergie et son énergie potentielle initiale (alors qu'il est immobile à 60°) se transforme progressivement en énergie cinétique. Au point le plus bas (appelons-le la position B), l'énergie cinétique est à son minimum. Si on place la référence de hauteur à ce point le plus bas, l'énergie potentielle gravitationnelle est alors nulle, transformée entièrement en énergie cinétique. De A à B :



$$E_B = E_A + W_{nc}\,,$$

$$K_B + \underbrace{U_{gB}}_{=0} = \underbrace{K_A}_{=0} + U_{gA} + \underbrace{W_{nc}}_{=0}$$

$$\tfrac{1}{2}mv_B^2 = mgh_A$$

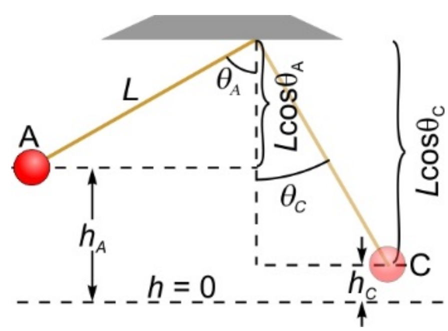
$$v_B = \sqrt{2gh_A}$$

La hauteur h_A demande une analyse géométrique du montage. Par rapport au point le plus bas, la hauteur h_A est la différence entre la longueur du fil (L) et le côté vertical du triangle illustré sur la figure ci-haut, dont la grandeur est $L\cdot\cos\theta$. On peut alors calculer la vitesse de la masse :

$$v_B = \sqrt{2gL\cos\theta_A} \quad = \quad \sqrt{2\times 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\times 0{,}800\text{ m}\times\cos 60°} \quad = \quad 2{,}80\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) v = 2,40 m/s

Si on laisse remonter le pendule de 30° avant de calculer sa vitesse (au point C), une partie de l'énergie cinétique gagnée durant la descente redeviendra énergie potentielle gravitationnelle. Cependant, les deux formes d'énergie seront encore présentes. Si on part de A à nouveau pour traiter la conservation de l'énergie :



$$E_C = E_A + W_{nc}\,,$$

$$K_C + U_{gC} = \underbrace{K_A}_{=0} + U_{gA} + \underbrace{W_{nc}}_{=0}$$

$$\tfrac{1}{2}mv_C^2 + mgh_C = mgh_A \qquad (1)$$

Si on cherche la vitesse au point C :

$$v_C = \sqrt{2gh_A - 2gh_C} \quad = \quad \sqrt{2g\left(h_A - h_C\right)}$$

Selon la même démonstration que tantôt, l'expression de h_C est $L\left(1-\cos\theta_C\right)$, donc :

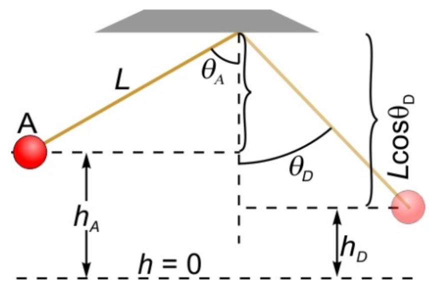
$$v_C = \sqrt{2g\left(L\left(1-\cos\theta_A\right)-L\left(1-\cos\theta_C\right)\right)} \quad = \quad \sqrt{2gL\left(\cos\theta_C-\cos\theta_A\right)}$$

$$v_C = \sqrt{2\times 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\times 0{,}800\text{ m}\times\left(\cos 30°-\cos 60°\right)} \quad = \quad 2{,}40\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

c) θ = 41,0°

1 à 11 12 à 24 25 à 38 39 à 47

Le traitement de la conservation de l'énergie mène à la même équation qu'en b), alors que la position finale comporte les deux formes d'énergie mécanique. Si on appelle D la nouvelle position considérée :



$$(1) \qquad \tfrac{1}{2}mv_D^2 + mgh_D = mgh_A$$

Les hauteurs en A et D peuvent encore s'exprimer par : $h_A = L(1-\cos\theta_A)$ et $h_D = L(1-\cos\theta_D)$. Donc :

$$\tfrac{1}{2}v_D^2 + gL(1-\cos\theta_D) = gL(1-\cos\theta_A)$$

On isole finalement l'angle θ_D :

$$\theta_D = \cos^{-1}\left(\cos\theta_A + \frac{v_D^2}{2gL}\right)$$

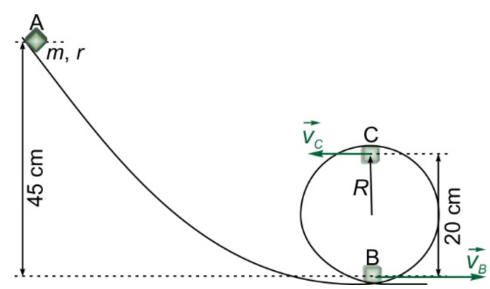
$$\theta_D = \cos^{-1}\left(\cos 60° + \frac{\left(2{,}00\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2\times 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\times 0{,}800\,\text{m}}\right) = 41{,}0°$$

À noter que le module de la vitesse sera celui-là des deux côtés du centre, lorsque l'angle est le même avec la verticale. Il n'est pas nécessaire d'identifier le côté analysé pour le calcul.

7.44 Solution : La boucle verticale retour à la question ▲

a) v = 2,97 m/s

Si le bloc glisse sans frottement, aucune force ne réduit la quantité d'énergie mécanique. Il y aura donc conservation de l'énergie mécanique, et on peut écrire :



$$E_B = E_A + \underbrace{W_{nc}}_{=0}$$

En appelant A et B les points aux extrémités de la descente et en considérant une référence de hauteur au point le plus bas :

$$K_B + \underbrace{U_{gB}}_{=0} = \underbrace{K_A}_{=0} + U_{gA}$$

$$\tfrac{1}{2}mv_B^2 = mgy_A$$

La masse étant la même dans les deux termes :

$$\tfrac{1}{2}v_B^2 = gy_A$$

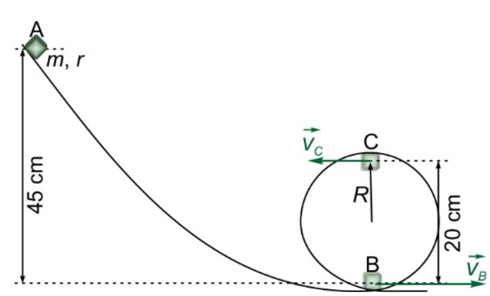
$$v_B = \sqrt{2gy_A} = \sqrt{2\times 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\times 0{,}45\,\text{m}} = 2{,}97\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) v = 2,21 m/s

Durant la montée du bloc jusqu'au sommet de la boucle, il n'y a encore aucun frottement cinétique, il y aura donc conservation de l'énergie mécanique.

Le sommet de la boucle doit être le point final du mouvement analysé. On peut cependant choisir le point initial, et on peut considérer le même point de départ qu'en a). On peut donc écrire :

$$E_C = E_A + \underbrace{W_{nc}}_{=0}$$



La bille roule et se déplace, donc son énergie cinétique se partage en deux termes. En appelant A et C les points aux extrémités du parcours et en considérant une référence de hauteur au point le plus bas :

$$K_C + U_{gC} = \underbrace{K_A}_{=0} + U_{gA}$$

1 à 11 12 à 24 25 à 38 39 à 47

$$\tfrac{1}{2}mv_C^2 + mgy_C = mgy_A$$

On doit ajouter cette fois-ci un lien entre la hauteur y_C et le rayon de la boucle. Au sommet de la boucle, le bloc est à une distance 2R au-dessus du point le plus bas (toujours utilisé comme référence) :

$y_C = 2R$ avec R = ½×20 cm = 0,10 m

L'équation principale devient alors :

$$\tfrac{1}{2}mv_C^2 + mg(2R) = mgy_A$$

Il ne reste qu'à simplifier et trouver la vitesse v_C :

$$\tfrac{1}{2}v_C^2 + 2gR = gy_A$$

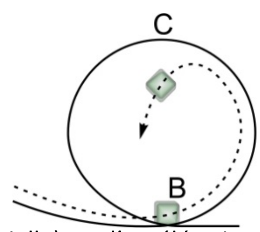
$$\tfrac{1}{2}v_C^2 = g(y_A - 2R) \qquad (1)$$

$$v_C = \sqrt{2g(y_A - 2R)}$$

$$v_C = \sqrt{2\times 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}(0{,}45\,\text{m} - 2\times 0{,}10\,\text{m})} = 2{,}21\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

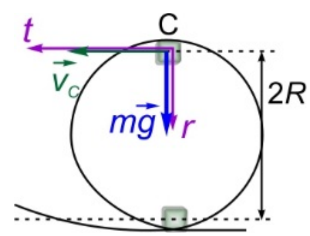
c) R = 0,180 m

Si le bloc va trop lentement au sommet de la boucle, il retombera sans suivre la surface de la boucle (voir figure ci-contre). Vu autrement, si le rayon est trop grand, le bloc aura trop ralenti en montant et retombera sans rester en contact avec la surface.



Le rayon maximal est donc lié au scénario où le bloc reste en tout juste en contact avec la surface au point le plus haut, sans s'y appuyer. S'il demeure tout juste en contact sans s'y appuyer, la force normale qu'il subit provenant de la surface est donc nulle, et seule la force gravitationnelle agit sur le bloc au sommet. L'analyse des forces fournira donc un lien entre la vitesse (tangentielle) et l'accélération gravitationnelle. Au niveau de l'énergie, le traitement de la conservation de l'énergie jusqu'au point C entraîne les mêmes étapes qu'en b), et le passage par la même équation (1) qu'on y a obtenue :

$$(1) \qquad \tfrac{1}{2}v_C^2 = g(y_A - 2R)$$



Le traitement des équations des forces amène l'autre partie de la solution. Puisqu'il n'y qu'une force agissant radialement :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\vec{g}$$

$$\sum F_r = ma_r = mg = \frac{mv_C^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v_C^2 = gR$$

On peut alors insérer cette expression de v^2 dans l'équation principale pour isoler et calculer le rayon R correspondant :

$$(1) \qquad \tfrac{1}{2}gR = g(y_A - 2R)$$

$$\frac{1}{2}R + 2R = y_A$$

$$R = \frac{2}{5}y_A = \frac{2}{5}\times 0{,}45\,\text{m} = 0{,}180\,\text{m}$$

7.45 Solution : Diagramme 1 retour à la question ▲

Puisqu'aucune valeur n'est fournie, on ne pourra tracer que l'allure des courbes. On doit donc simplement déterminer si les relations sont linéaires, quadratiques, ou autre.

a)

On peut évidemment affirmer dès le départ que l'énergie cinétique initiale est nulle; un point de la courbe à tracer est donc connu. On doit ensuite établir la relation entre l'énergie cinétique et le temps, pour le cas d'une accélération constante, et ça doit se faire par algèbre. Réunissons les équations qui s'appliquent dans cette situation, pour obtenir une équation de K en fonction de t.

L'énergie cinétique en fonction de la vitesse :

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 \qquad (1)$$

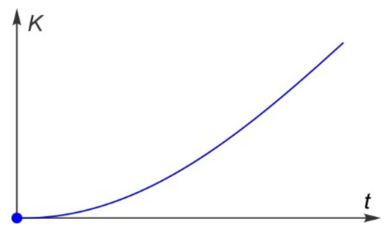
Comme la vitesse varie, on doit si possible l'exprimer en fonction des facteurs constants :

$$v = \underbrace{v_0}_{=0} + at \;=\; at \qquad (2)$$

On a donc une expression de la vitesse pouvant remplacer v dans l'équation (1) :

$$K = \tfrac{1}{2}m(at)^2 \;=\; \frac{ma^2t^2}{2}$$

La masse et l'accélération étant constantes, on constate alors que l'énergie cinétique varie avec le carré du temps. On connait donc l'allure de la courbe, une branche de parabole :



b)

Si on pose que la position au départ est nulle, on sait que la courbe de l'énergie cinétique débute à l'origine. Par la suite, les quelques équations reliant la position et l'énergie cinétique permettront de déduire l'allure de la courbe :

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 \qquad (1)$$

Puisqu'on s'intéresse à la position, on aura sûrement besoin d'une équation comportant la position x :

$$x = \underbrace{x_0}_{=0} + \underbrace{v_0}_{=0}t + \tfrac{1}{2}at^2$$

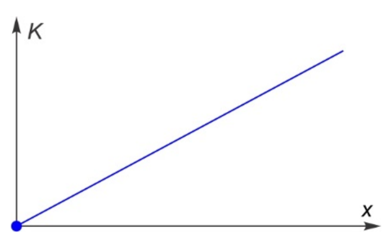
Cette équation fait apparaître le temps, qui varie également et qu'on ne veut pas faire apparaître. Une autre équation de cinématique comporte la position mais pas le temps :

$$v^2 = \underbrace{v_0^2}_{=0} + 2a\left(x - \underbrace{x_0}_{=0}\right) \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2ax \qquad (3)$$

Cette équation (3) insérée dans l'équation (1) entraîne :

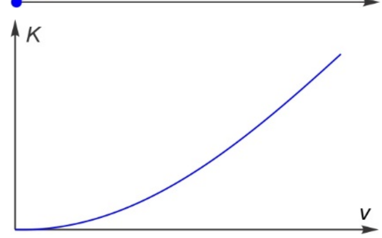
$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 \;=\; \tfrac{1}{2}m(2ax) \;=\; max$$

On constate alors que pour une masse et une accélération constante, l'énergie cinétique est proportionnelle à la distance parcourue (à partir du repos). La courbe $K(t)$ est donc une droite passant par l'origine.



c)

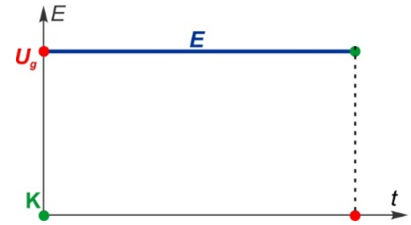
Ce scénario est plus simple, car l'équation principale de l'énergie cinétique la relie directement à la vitesse, et on constate que l'énergie cinétique est proportionnelle au carré de la vitesse. La courbe $K(t)$ est donc une branche de parabole passant par l'origine :



7.46 Solution : retour à la question ▲

À partir de la situation décrite, on peut d'emblée affirmer que l'énergie totale sera constante puisque le bloc glisse sans frottement cinétique (aucune perte d'énergie mécanique).

a)



Si on analyse l'évolution de chaque type d'énergie en fonction du temps, réalisons d'abord qu'initialement, l'énergie cinétique est nulle (bloc immobile), et alors que toute l'énergie mécanique est sous forme d'énergie potentielle gravitationnelle. À la fin, l'énergie potentielle est nulle puisque le bloc atteint la hauteur zéro. Toute l'énergie est donc cinétique. On peut alors placer quelques points sur le graphique. Ci-contre, le pointillé représente l'instant de la rencontre, où le bloc est au point le plus bas, à une certaine vitesse.

Pour déterminer l'allure des courbes *K* et U_g, on doit recourir aux équations. Cependant, on pourrait n'en déterminer qu'une et déduire l'autre sachant que $E = K + U$, mais on démontrera les deux. Réunissons les équations qui s'appliquent dans cette situation, pour obtenir une équation de *K* en fonction de *t*.

L'énergie cinétique en fonction de la vitesse :

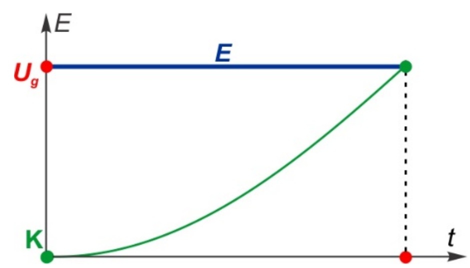
$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 \qquad (1)$$

La vitesse varie selon une accélération constante, car la pente est constante (car $a = g\sin\theta$). Selon la cinématique, on peut donc écrire :

$$v = \underbrace{v_o}_{=0} + at \;=\; at \;=\; g\sin\theta \cdot t \qquad (2)$$

On a donc une expression de la vitesse pouvant remplacer *v* dans l'équation (1) :

$$K = \tfrac{1}{2}m\left(g\sin\theta\cdot t\right)^2 \;=\; \frac{mg^2\sin^2\theta\times t^2}{2} \;=\; \frac{mg^2\sin^2\theta}{2}\times t^2$$

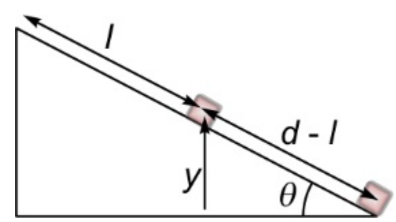


Seul le temps varie, donc l'énergie cinétique est proportionnelle au carré du temps. Ainsi, l'allure de la courbe *K*(*t*) est une branche de parabole.

On peut alors tout de suite conclure que l'énergie potentielle gravitationnelle suivra une courbe inverse, soit une branche de parabole vers le bas, à partir de la valeur maximale d'énergie à $t = 0$. Cependant, pour démontrer le traitement complet ou pour le cas où on a débuté par l'énergie potentielle, la démonstration pour U_g suit.

L'énergie potentielle gravitationnelle peut aussi être exprimée en fonction des données constantes et du temps.

$$U_g = mgy$$



La hauteur *y* varie en fonction de la distance *l* parcourue, selon $y = (d - l)\sin\theta$ (voir figure ci-contre). Ainsi :

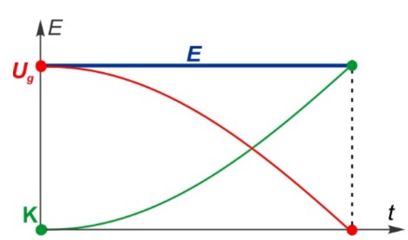
$$U_g = mg\left(d - l\right)\sin\theta \qquad (3)$$

Dans ce terme, seule la longueur *l* parcourue varie, et on veut l'exprimer en fonction du temps. Puisque cette longueur parcourue augmente selon une accélération constante à partir du repos, on peut utiliser l'équation :

$$l = l_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \;=\; \tfrac{1}{2}at^2 \qquad (4)$$

L'intégration de cette dernière expression dans l'équation (3) entraîne :

$$U_g = mg\left(d - \tfrac{1}{2}at^2\right)\sin\theta \;=\; mgd\sin\theta - \left(\tfrac{1}{2}mga\sin\theta\right)t^2$$

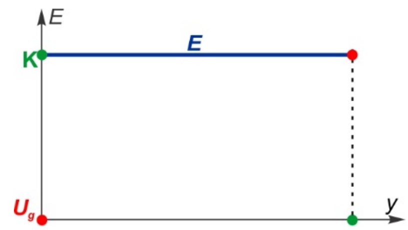


Dans cette dernière forme, on retrouve un terme constant – une ordonnée à l'origine, puisque la valeur initiale d'énergie potentielle gravitationnelle n'est pas nulle – ainsi qu'un terme représentant une branche de parabole vers le bas, ce qui est cohérent avec la courbe inverse de celle de l'énergie cinétique (voir figure ci-contre).

b)

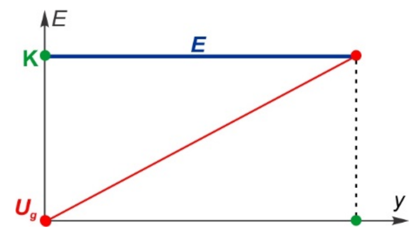
1 à 11 12 à 24 25 à 38 39 à 47

Si on illustre l'évolution des différentes formes d'énergie en fonction de la hauteur, on doit tenir compte du fait que la hauteur est élevée au début et nulle à la fin du mouvement. Le mouvement évoluera donc de droite à gauche sur le graphique. L'énergie cinétique, nulle au début, sera nulle à la position la plus haute. L'énergie potentielle, maximale au début, est donc maximale à la position la plus haute. L'énergie mécanique totale est évidemment constante peu importe la hauteur du bloc durant sa glissade. On peut déjà tracer la structure du graphique (image ci-contre).



L'une des deux formes d'énergie demandant analyse, l'énergie potentielle gravitationnelle, s'exprime par défaut en fonction de la hauteur. Commençons par son cas :

$$U_g = mgy$$



C'est directement l'équation d'une droite croissante passant par l'origine (voir figure ci-contre).

On peut alors deviner automatiquement que la courbe de l'énergie cinétique sera une droite décroissante passant par la valeur la plus élevée d'énergie cinétique (l'énergie totale). Pour le démontrer, réunissons les équations reliant l'énergie cinétique à la hauteur y :

$$K = \tfrac{1}{2} m v^2 \qquad (1)$$

La vitesse varie selon une accélération constante. Une équation de la cinématique permet de lier la vitesse, l'accélération et la position, position le long de la surface que l'on pourra exprimer en fonction de la hauteur :

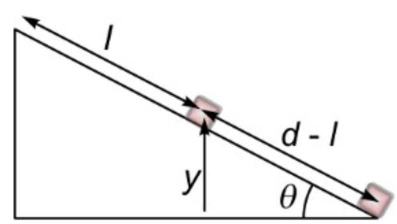
$$v^2 = \underbrace{v_0^2}_{=0} + 2a\left(l - \underbrace{l_0}_{=0}\right) = 2al \qquad (5)$$

La hauteur y, que l'on veut faire apparaître, peut être exprimée en fonction de la longueur l :

$$y = (d - l)\sin\theta$$

$$l = d - \frac{y}{\sin\theta} \qquad (6)$$

Cette équation (6) dans l'équation (5), le tout intégré dans l'équation (1), entraîne :



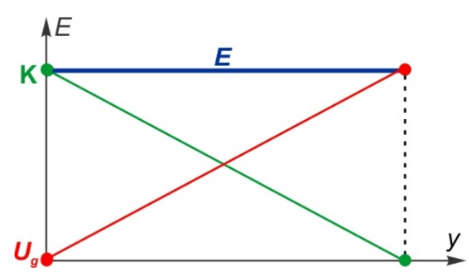
$$(5) \qquad v^2 = 2al = 2a\left(d - \frac{y}{\sin\theta}\right)$$

$$(1) \qquad K = \tfrac{1}{2} m v^2 = \tfrac{1}{2} m \left(2a\left(d - \frac{y}{\sin\theta}\right)\right) = ma\left(d - \frac{y}{\sin\theta}\right)$$

On peut réarranger ce terme pour trouver l'équation d'une droite de pente négative avec une ordonnée à l'origine *mad* :

$$K = mad - \frac{ma}{\sin\theta} y$$

On peut donc confirmer que l'énergie cinétique suit une évolution linéaire décroissante en fonction du la hauteur (voir image ci-contre), et c'est bien la réciproque de la courbe de l'énergie potentielle gravitationnelle.



7.47 Solution : À reculons

retour à la question ▲

v = 23,8 m/s

La situation se déroule en deux étapes. D'une part, la voiture monte la surface inclinée avec son élan. Par conservation de l'énergie, une partie de son énergie cinétique se transforme en énergie potentielle gravitationnelle. Ensuite, la voiture devient un projectile, dont on connait les positions initiales et finales.

Puisque l'on connait le point d'atterrissage de l'auto, on doit procéder à rebous pour trouver la vitesse de l'auto au sommet du tremplin. Cette vitesse permettra ensuite de calculer sa vitesse au bas du tremplin.

Mouvement de projectile :

Il s'agit d'un problème de cinétique seule. On rédige la liste des paramètres et des équations pour un projectile, avec les données connues, en considérant une origine sous le sommet du tremplin :

$$\begin{array}{ll} x_0 = 0 & y_0 = 3\,\mathrm{m} \\ x = 40\,\mathrm{m} & y = 0 \\ v_{0x} = v_0 \cos\theta & v_{0y} = v_0 \sin\theta \\ v_x = v_{0x} & v_y = ? \\ a_x = 0 & a_y = -g \end{array}$$

$$t = 0$$

$$x = \underbrace{x_0}_{=0} + v_{0x} t + \underbrace{\tfrac{1}{2} a t^2}_{=0} \quad (1) \qquad \underbrace{y}_{=0} = y_0 + v_{0y} t - \tfrac{1}{2} g t^2 \quad (2)$$

$$v_y = v_{0y} - gt \quad (3)$$

Selon l'équation (1) :

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}.$$

Insérée dans l'équation (2), cela entraîne :

$$0 = y_0 \; + \; v_0 \sin\theta \times \frac{x}{v_0 \cos\theta} \; - \; \tfrac{1}{2} g \times \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta} \right)^2$$

L'inconnue de cette équation est v_0, donc on peut isoler cette vitesse initiale :

$$v_0 = \sqrt{\frac{g x^2}{2\cos^2\theta \times (y_0 \; + \; x \tan\theta)}} = \sqrt{\frac{9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \times (40\,\mathrm{m})^2}{2 \times \cos^2 20° \times (3\,\mathrm{m} + 40\,\mathrm{m} \times \tan 20°)}} = 22{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

C'est la vitesse à laquelle l'auto quitte le tremplin. On peut alors passer à la seconde étape, le calcul de la vitesse au bas du tremplin, puisque l'énergie s'est conservée durant la montée (aucun frottement dans les roues). Selon l'équation principale de la conservation de l'énergie, si le point A est le bas de la pente et le point B, en-haut :

$$E_B = E_A + \underbrace{W_{nc}}_{=0}$$

$$K_B + U_{gB} = K_A + \underbrace{U_{gA}}_{=0}$$

$$\tfrac{1}{2} m v_B^2 + m g y_B = \tfrac{1}{2} m v_A^2$$

La vitesse trouvée précédemment est la vitesse v_B, au haut du tremplin. On cherche donc la vitesse v_A, le reste étant connu (ou pouvant être simplifié, comme la masse m) :

$$v_A = \sqrt{v_B^2 + 2 g y_B} = \sqrt{\left(22{,}5\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + 2 \times 9{,}81\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \times 3\,\mathrm{m}} = 23{,}8\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

C'est environ 86 km/h, donc c'est une vitesse plausible.