1 à 9 10 à 20 21 à 32

CH 6 INTERACTIONS ET 3E LOI DE NEWTON

CONSTANTES UTILES

g = 9,81 m/s²
G = 6,674×10^{-11} N·m²/kg²
R_T = 6,38×10^6 m
R_L = 1,74×10^6 m
M_T = 5,98×10^{24} kg
M_L = 7,36×10^{22} kg
d_{TL} = 3,84×10^8 m
M_S = 1,99×10^{30} kg
d_{TS} = 1,50×10^{11} m

ÉQUATIONS LIÉES AU CHAPITRE :

$$\boxed{\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}}$$

$$\boxed{v_{orb} = \sqrt{\frac{GM}{r}}}$$

$$F_r = \frac{mv^2}{r} \qquad T_{orb} = \frac{2\pi r}{v_{orb}}$$

Considérez dans ce chapitre que les poulies sont sans masse.

6.1 INTERACTIONS ET PAIRES ACTION RÉACTION

6.1 Question : Action-réaction en vélo solution ▶

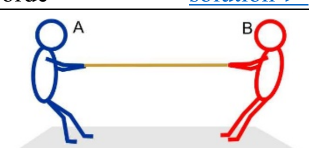
Un cycliste roule sur une piste cyclable et se trouve à un certain instant dans une courbe, incliné de 25° par rapport à la verticale. Identifiez toutes les forces agissant sur le cycliste et la réaction de chacune.

6.2 Action-réaction en ligne

Essayez ces exercices en ligne pour vérifier si vous reconnaissez efficacement la réaction d'une force quelconque.

6.3 Question : Souque à la corde solution ▶

Deux personnes s'affrontent au souque à la corde. En considérant les deux personnes et la corde comme des masses distinctes :



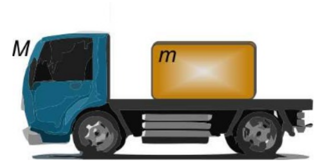
a) Combien de forces agissent sur l'une des personnes?
b) Combien de forces agissent sur la corde?
c) Identifiez la réaction à chacune des forces agissant sur l'une des personnes.

6.4 Exercice : La panne solution ▶

Un homme costaud (m = 115 kg) doit pousser son automobile (M = 1319 kg) sur une surface horizontale. Si le coefficient de frottement statique entre ses souliers et le sol est de 0,925 et que l'auto peut rouler sans frottement, déterminez l'accélération maximale (et constante) qu'il peut obtenir en poussant l'auto sur plusieurs mètres.

6.5 Exercice : Le camion solution ▶

Un camion (M = 4 500 kg) transporte une caisse (m = 750 kg) simplement déposée sur sa plate-forme, sans aucune fixation; seul le frottement peut la garder en place. Les coefficients de frottement statique et cinétique entre la plate-forme et la caisse sont respectivement de 0,750 et 0,500.



a) Si le camion accélère à 1,50 m/s², quel est le module de la force de frottement statique agissant sur la caisse?
b) Quel sera le module de l'accélération maximale que peut subir le camion sans que la caisse ne glisse?
c) Quelle est alors le module la force de frottement entre les pneus du camion et le sol?
d) Quel est le module de l'accélération maximale que peut subir le camion s'il monte une pente inclinée de 5,50° (tout en évitant que la caisse ne glisse)?

6.6 Exercice : Traction solution ▶

La répartition du poids d'une Civic 2018 traction avant est de 62% sur les roues avant et 38% sur les roues arrière. Les coefficients de frottement statique et cinétique entre ses pneus et le sol sont de 0,925 et 0,690 respectivement.

a) Quelle sera son accélération maximale vers l'avant si ses pneus ne glissent pas?
b) Quelle sera son accélération maximale vers l'avant si ses pneus glissent?
c) Quelle sera la distance minimale d'arrêt si les roues ne glissent pas et que l'auto roule initialement à 100 km/h?
d) Quelle sera la distance d'arrêt si les roues sont bloquées et glissent?

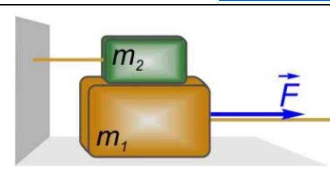
6.7 Exercice : Ferrari Pista solution ▶

La Ferrari 488 Pista (1 385 kg) est une voiture à propulsion dont 59% du poids repose sur les roues arrière. Elle peut effectuer dans les meilleures conditions une accélération de 0 à 100 km/h en 2,9 s.

a) Quel coefficient de frottement statique est requis pour obtenir cette accélération (en supposant que c'est une accélération constante).
b) En supposant que le coefficient de frottement statique n'est que 75% de sa valeur à sec si la chaussée est mouillée, quelle sera la durée de l'accélération de 0 à 100 km/h?
c) Combien de temps lui faudrait-il pour atteindre 100 km/h sur chaussée sèche dans une pente de 11,5°?

6.8 Exercice : L'empilement solution ▶

Sur le montage de la figure ci-contre, m_1 = 1,5 kg et m_2 = 1,2 kg. La masse m_2 est fixée à un mur par une corde et on applique une force $\vec{F}$ sur m_1 vers la droite à l'aide d'une autre corde. Le coefficient de frottement statique entre les deux masses est μ_s = 0,475 et il est nul sous la masse m_1.



a) Si on applique une force F = 5 N, la masse m_1 se mettra-t-elle en mouvement?
b) À quelle valeur de la force F sera-t-on tout juste à la limite de mettre la masse m_1 en mouvement?

6.9 Exercice : Le stationnement solution ▶

Une automobile est stationnée dans une entrée en pente et glacée, où le coefficient de frottement statique est

6.1- ↓↓↓ — **6.2**- — **6.3**- a) 4 — b) 3 — c) ↓↓↓ — **6.4**- a = 0,728 m/s² — b) f = -5,00 cm — **6.5**- a) f_s = 1125 N — b) a = 7,36 m/s² — c) f_{sM} = 38,6×10³ N — d) a = 6,38 m/s² — **6.6**- a) a = 5,63 m/s² — b) a = 4,20 m/s² — c) d = 42,5 m — d) d = 57,0 m — **6.7**- a) μ_s = 1,65 — b) t = 3,87 s — c) t = 3,74 s — **6.8**- a) Non — b) F = 5,59 N — **6.9**- a) Oui — b) Non — c) Accélération impossible —

μ_s = 0,17. L'inclinaison de l'entrée est de 5,50°, et le poids de l'auto est réparti également sur les 4 roues.

a) L'automobile sera-t-elle en mesure de demeurer immobile dans cette pente lorsque les 4 roues sont immobilisées par les freins?
b) L'automobile demeurera-t-elle immobile si seules les deux roues arrière sont immobilisées par le frein de stationnement?
c) Quelle accélération maximale peut-elle obtenir vers le haut de la pente si seules les roues avant sont motrices?

6.10 Exercice : Le train solution ►

Un train est composé d'une locomotive (M = 261×10³ kg) et de 5 wagons (m = 180×10³ kg chacun). La locomotive parvient à propulser le train en appliquant une force de frottement sur le sol, vers l'arrière. Lors d'une certaine accélération, l'attelage entre la locomotive et le premier wagon indique une tension de 4,8×10⁵ N. On néglige les forces de frottement entre les wagons et les rails.

a) Quelle est l'accélération du train à cet instant?
b) Quelle tension indique le dernier attelage?
c) Quelle est la force de frottement agissant sur la locomotive?
d) Quelle est la force résultante sur le 3ᵉ wagon?

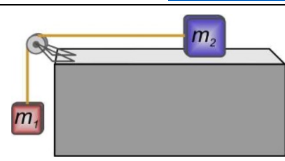
6.11 Exercice : La Ferrari Pista solution ►

Avec ses 720 chevaux-vapeur, le moteur de la Ferrari 488 Pista (voiture de 1 385 kg à propulsion avec 59% du poids sur les roues arrière) peut appliquer au sol une force de 16,6 kN, si l'adhérence le lui permet. Si le coefficient de frottement statique entre ses pneus et le sol était de 1,25 et μ_c = 0,87, parviendrait-elle à appliquer cette force au sol pour accélérer? En d'autres mots, quelle force correspond à l'accélération maximale de cette auto?

6.2 LES CORDES ET LES POULIES

6.12 Exercice : Poulie #1 solution ►

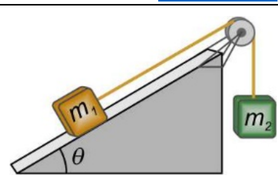
Sur le montage ci-contre, m_1 = 2 kg, et m_2 = 3 kg. Déterminez le module de l'accélération des masses et de la tension si :



a) il n'y a aucun frottement entre m_2 et la surface;
b) le coefficient de frottement cinétique sous m_2 est de 0,3 et la masse m_1 est en mouvement vers le bas.
c) μ_c = 0,3 et la masse m_2 se déplace vers la droite.
d) Vrai ou Faux : La tension est égale au poids de la masse suspendue m_1.

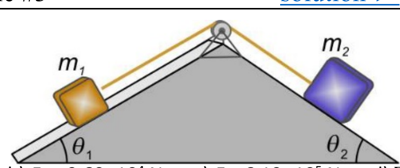
6.13 Exercice : Poulie #2 solution ►

Sur le montage ci-contre, m_1 = 2 kg, m_2 = 1,5 kg et θ = 30°. Il n'y a aucun frottement entre les surfaces et dans la poulie. Déterminez le module de l'accélération de la masse m_2 et indiquez dans quel sens (les surfaces sont sans frottement).



6.14 Exercice : Poulie #3 solution ►

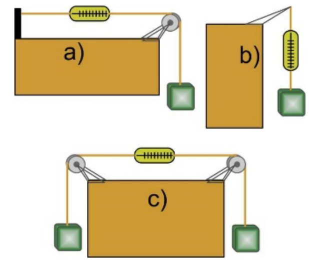
Sur le montage ci-contre, m_1 = 2 kg, m_2 = 2 kg, θ_1 = 30°et θ_2 = 40°. Déterminez l'accélération de la masse m_2 et indiquez dans quel sens, si les surfaces sont sans frottement.



6.15 Question : Les 3 dynamomètres solution ►

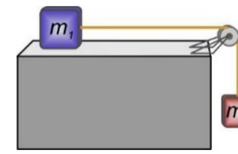
On place un dynamomètre le long de la corde sur chacun des montages suivants. Toutes les masses sont de 2 kg.

Qu'indiquera le dynamomètre dans chaque cas?



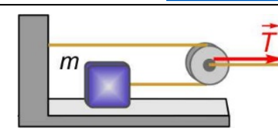
6.16 Exercice : Poulie #4 solution ►

Sur le montage ci-contre, m_1 = 750 g et m_2 = 500 g, et le coefficient de frottement statique entre la masse m_1 et la surface horizontale est de 0,550. Le système se mettra-t-il en mouvement s'il est initialement immobile?



6.17 Exercice : Poulie #5 solution ►

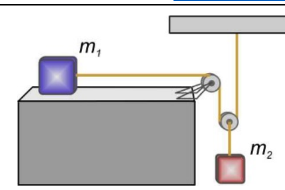
Dans le montage ci-contre, m = 3 kg et l'accélération de la masse m est de 2,25 m/s² lorsqu'on applique une certaine force de tension dans la corde fixée à la poulie. Quelle est cette tension T?



(La poulie est sans masse et il n'y a pas de frottement).

6.18 Exercice : Poulie #6 solution ►

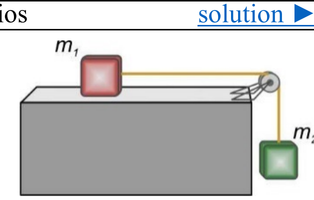
Sur le montage ci-contre, m_1 = 2,5 kg et m_2 = 3 kg. Il n'y a aucun frottement sous m_1.



a) Déterminez l'accélération de m_1.
b) Déterminez la tension dans la corde fixée à m_1.

6.19 Exercice : Deux scénarios solution ►

Sur le montage ci-contre, il y a un coefficient de frottement cinétique inconnu entre m_1 et la surface horizontale. Si m_2 = 2 kg, l'accélération des masses est de 3,4 m/s²; si m_2 = 4 kg, l'accélération est plutôt de 5,6 m/s².



a) Déterminez la valeur de la masse m_1.
b) Déterminez le coefficient de frottement cinétique.

6.3 DYNAMIQUE DU MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORME

6.20 Exercice : Le mois lunaire solution ►

La Lune (M_L = 7,36×10²² kg) tourne autour de la Terre grâce à la force gravitationnelle. Elle complète un tour de la Terre en 27,3 j, à une distance de 3,84×10⁸ m. Par l'analyse du mouvement circulaire, déterminez le module de la force gravitationnelle entre la Terre et la Lune?

6.10 - a) a = 0,533 m/s² — b) F_5 = 9,60×10⁴ N — c) F = 6,19×10⁵ N — d) ΣF = 9,60×10⁴ N — **6.11** - Non — **6.12** - a) a = 3,92 m/s² et T = 11,8 N — b) a = 2,16 m/s² et T = 15,3 N — c) a = 5,69 m/s² et T = 8,24 N — d) Faux — **6.13** - a = 1,40 m/s², vers le bas — **6.14** - a = 0,700 m/s² vers la droite — **6.15** - a) 19,6 N — b) 19,6 N — c) 19,6 N — **6.16** - Oui — **6.17** - T = 13,5 N — **6.18** - a) a_1 = 4,53 m/s² — b) T = 11,3 N — **6.19** - a) m_1 = 1,83 kg — b) μ_c = 0,369 — **6.20** - F_g = 2,01×10²⁰ N —

1 à 9 10 à 20 21 à 32

6.21 Exercice : L'orbite électronique solution ▶

Un électron dans un atome d'hydrogène décrit un mouvement circulaire autour du noyau, sur une orbite dont le rayon est de $5{,}29\times10^{-11}$ m. Sa masse est de $9{,}109\times10^{-31}$ kg et la force magnétique qui agit entre le noyau et cet électron a un module de $8{,}25\times10^{-8}$ N. Déterminez la vitesse de l'électron sur son orbite. (On néglige la force gravitationnelle car elle est infime comparée à la force électrique.)

6.22 Exercice : Les *g* latéraux solution ▶

Une voiture de 1 315 kg dans un virage circulaire à plat roule à une vitesse constante de 66,0 km/h et les passagers subissent une accélération latérale de 0,25g.

a) Déterminez le rayon de courbure de cette courbe.
b) Déterminez le module de la force de frottement.
c) Quel coefficient de frottement statique minimal permettrait cette vitesse?

Divertissement

On peut se verser un verre d'eau et le boire tout en faisant un looping en avion.

6.23 Diagrammes de force en ligne (partie II)

Essayez ces exercices en ligne pour vérifier si vous maîtrisez la construction des diagrammes de forces.

6.24 Exercice : Toujours plus lourd solution ▶

Vous êtes passager dans une automobile qui subit une certaine accélération. Déterminez le rapport P_{APP}/F_g et l'angle que fait le poids apparent avec la verticale dans les situations suivantes :

a) vous accélérez lorsque le feu passe au vert au taux de 4,15 m/s²;
b) vous freinez brusquement de 50 km/h à 10 km/h sur une distance de 14,2 m;
c) vous roulez à 100 km/h sur l'autoroute.
d) vous roulez à la vitesse constante de 75 km/h dans une courbe dont le rayon de courbure est de 125 m.

6.25 Exercice : L'horizon incliné solution ▶

Sur la photo ci-contre, le cadran de l'auto indique 55 km/h et la moto et le pendule ont une position stable, dans une inclinaison autre que verticale. Estimez le rayon de courbure de la route à cet endroit. (Considérez que l'automobile et l'appareil photo sont bien à plat par rapport à l'horizontale absolue.)

6.26 Exercice : Le pendule solution ▶

Un radiesthésiste utilise un pendule constitué d'une bille suspendue à un fil de 16 cm de longueur. Le pendule est mis en rotation sur un cercle dont le rayon est 9,6 cm, et le fil du pendule définit un cône. Quelle est la vitesse tangentielle de la masse du pendule sur le cercle qu'il décrit?

6.27 Exercice : Ballade en moto solution ▶

Un motocycliste passe au sommet d'un button circulaire dont le rayon est de 62 m, sur une route de campagne. Il évalue alors que son appui au sol est réduit d'un facteur 2 au moment où il passe au sommet.

a) Quelle est la vitesse du motocycliste, considérée constante?
b) À cette vitesse, pour quel rayon de courbure serait-il tout juste sur le point de quitter le sol au sommet d'un button?

6.28 Exercice : Le rotor solution ▶

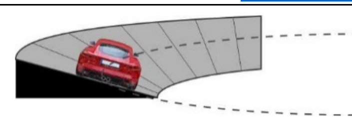
Le manège appelé le « Rotor » tourne rapidement et les passagers sont plaqués au mur par la force centrifuge. Déterminez la force normale agissant sur un passager de 80 kg si le rayon du manège est de 3,15 m et que la période de rotation est de 2,30 s.

6.29 Exercice : Le voyage en autobus solution ▶

Vous êtes debout durant un transport en autobus alors que celui-ci approche d'une courbe. L'autobus roule à 56 km/h et le rayon de la courbe est de 39 m.

a) De quel angle devrez-vous vous penchez pour demeurer en équilibre, sans vous tenir?
b) De quel coefficient de frottement statique minimal avez-vous besoin au sol pour ne pas glisser?

6.30 Exercice : La courbe inclinée solution ▶



Une voiture roule dans une courbe inclinée latéralement de 8°. Le coefficient de frottement statique entre les pneus et le sol est de 1,10. À quelle vitesse maximale peut-elle négocier cette courbe dont le rayon est de 79 m?

6.31 Exercice : Le satellite solution ▶

Un satellite de télécommunications est mis en orbite à 1300 km d'altitude. À quelle vitesse doit-il aller pour que sa trajectoire soit circulaire?

6.32 Exercice : L'altitude géostationnaire solution ▶

Un satellite géostationnaire est un satellite qui demeure au-dessus du même point de la Terre durant son mouvement orbital. Ça lui prend donc 24 heures faire le tour de la Terre. À quelle altitude, en kilomètres, un satellite doit-il se trouver pour être géostationnaire?

6.21- $v = 2{,}19\times10^6$ m/s — **6.22**- a) r = 137 m — b) f_S = 3 225 N — c) μ_s = 0,250 — **6.23**- —
6.24- a) P_{APP}/F_g = 1,09, θ = 22,9° — b) P_{APP}/F_g = 1,20, θ = 33,6° — c) P_{APP}/F_g = 1,00, θ = 0° — d) P_{APP}/F_g = 1,06, θ = 19,5° — **6.25**- r = 88,8 m —
6.26- v = 0,840 m/s² — **6.27**- a) v = 17,4 m/s² — b) r = 31,0 m — **6.28**- N = 1 881 N — **6.29**- a) θ = 32,3° — b) μ_s = 0,632 — **6.30**- v = 33,7 m/s —
6.31- $v = 7{,}21\times10^3$ m/s — **6.32**- h = 35 900 km

1 à 9 10 à 20 21 à 32

CH 6 INTERACTIONS ET 3[E] LOI DE NEWTON

6.1 INTERACTIONS ET PAIRES ACTION-RÉACTION

6.1 Solution : Action-réaction en vélo

retour à la question ▲

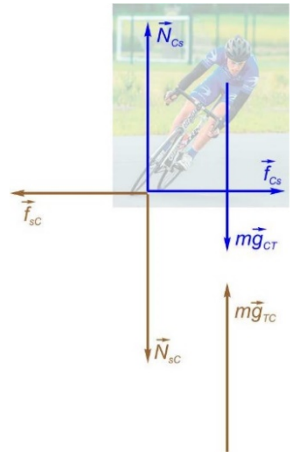
Forces : $m\vec{g}_{CT}$, $\vec{N}_{Cs}$ et $\vec{f}_{Cs}$

Réactions : $m\vec{g}_{TC}$, $\vec{N}_{sC}$ et $\vec{f}_{sC}$

Outre la Terre qui peut appliquer une force sur le cycliste sans être en contact avec lui, seul le sol est en contact avec le cycliste et son vélo. Le sol peut être à l'origine d'une force normale ET d'une force de frottement.

Il y a donc en tout trois forces sur le vélo. En identifiant l'origine et l'objet de chaque force, qui implique le Cycliste le sol et la Terre, il s'agit de : $m\vec{g}_{CT}$, $\vec{N}_{Cs}$ et $\vec{f}_{Cs}$.

Les réactions à ces trois forces sont : $m\vec{g}_{TC}$, $\vec{N}_{sC}$ et $\vec{f}_{sC}$



6.2 Action-réaction en ligne

retour à la question ▲

Exercices en ligne

6.3 Solution : Souque à la corde

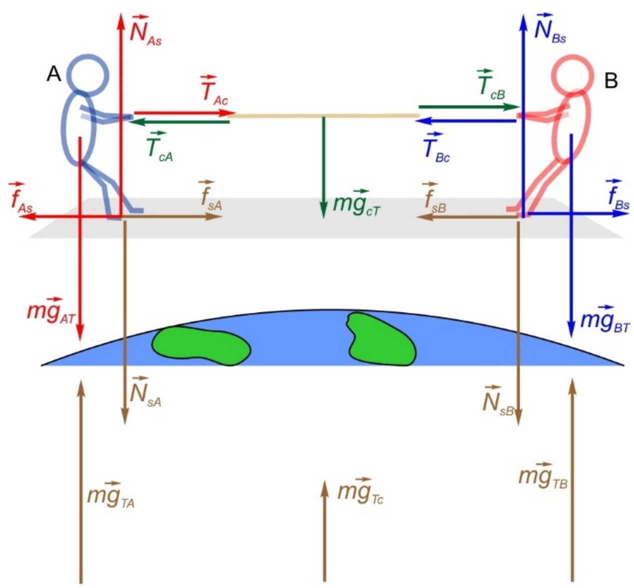
retour à la question ▲

a) 4 forces

Chaque personne est en contact avec 2 choses, la corde et le sol. La corde applique une force de tension, alors que le sol peut appliquer 2 forces sur la personne, soit une force normale et une force de frottement. Finalement, la Terre peut agir à distance avec une force gravitationnelle. Il y a donc au total 4 forces agissant sur chaque personne, $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{f}_s$ et $m\vec{g}$ (voir figure ci-contre).

b) 3 forces

La corde n'est en contact qu'avec les deux personnes (subit donc deux tensions), et subit aussi une force gravitationnelle provenant de la Terre. Donc la corde subit au total 3 forces (voir figure).



c)

On a nommé en a) les 4 forces agissant sur l'une des personnes. Les réactions à ces 4 forces doivent être de même nature et en sens contraire, agissant sur un autre corps.

La tension que la corde applique sur la personne a pour réaction une tension également, appliquée sur la corde par la personne ($\vec{T}_{cA}$ sur la figure ci-haut).

La normale que le sol applique sur la personne a pour réaction une force normale également, appliquée sur le sol par la personne ($\vec{N}_{sA}$ sur la figure).

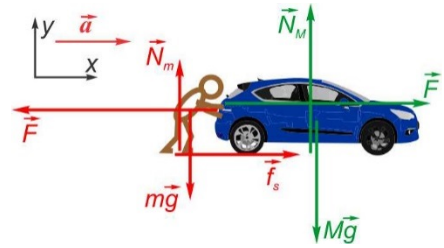
La force de frottement que le sol applique sur la personne a pour réaction une force de frottement également, appliquée sur le sol par la personne ($\vec{f}_{sA}$ sur la figure).

Finalement, la force gravitationnelle que la Terre applique sur la personne a pour réaction une force gravitationnelle, appliquée par la personne sur la Terre (vers le haut, $m\vec{g}_{TA}$ sur la figure).

1 à 9 10 à 20 21 à 32

6.4 Solution : La panne retour à la question ▲

a = 0,728 m/s²



Il y a deux masses impliquées dans la situation; on a donc besoin des équations des forces sur chacune de ces deux masses pour solutionner le problème. La figure suivante montre les forces sur les deux masses (l'homme et l'automobile).

L'une des forces présentes est la force d'un corps sur l'autre (la force F sur la figure). C'est la force avec laquelle l'homme pousse la voiture. La force de réaction de cette force est de même grandeur et agit sur l'homme, en sens contraire.

Le frottement entre les pieds de l'homme et le sol est la seule force qui fait avancer le système. Les équations des forces sont :

m $$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{N}_m + m\vec{g} + \vec{f}_s + \vec{F}$$

$$\sum F_x = ma_x = f_s - F \qquad (1)$$

$$\sum F_y = ma_y = N_m - mg = 0 \qquad (2)$$

M $$\sum \vec{F} = M\vec{a} = \vec{N}_M + M\vec{g} + \vec{F}$$

$$\sum F_x = Ma_x = F \qquad (3)$$

$$\sum F_y = Ma_y = N_M - Mg = 0 \qquad (4)$$

Comme on mentionne que l'on cherche l'accélération maximale, on doit comprendre que la force de frottement entre les souliers et le sol doit être à sa valeur maximale, c'est-à-dire que :

$$f_s = f_{s\,\max} = \mu_s N_m \qquad (5)$$

On a 5 équations, et les 5 inconnues sont a_x, f_s, F, N_m, et N_M. Comme on cherche l'accélération ($a = a_x$), on a besoin du sous-groupe d'équation (1), (2), (3) et (5), dont les 4 inconnues sont a_x, f_s, F, et N_m. Les équations (3) et (5) fournissent des expressions de F et de f_s qu'on peut insérer dans l'équation (1) :

(1) $$ma = \mu_s N_m - Ma$$

L'équation (2) nous donnera une expression de N_m :

(2) $$N_m = mg$$

L'équation (1) devient alors :

$$ma = \mu_s (mg) - Ma$$

On isole l'accélération :

$$a = \frac{\mu_s mg}{m+M} = \frac{0{,}925 \times 115\text{ kg} \times 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{115\text{ kg} + 1319\text{ kg}} = 0{,}728\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

6.5 Solution : Le camion retour à la question ▲

a) f_s = 1125 N

On doit rédiger les équations des forces pour les deux masses distinctement car c'est la seule façon de tenir compte de la force de frottement entre les deux objets. On doit donc d'abord identifier toutes les forces sur les deux corps, tel que réalisé sur la figure ci-contre. Puisque le camion accélère (on présume vers l'avant), utilisons un système d'axes où l'axe x est dirigé vers l'avant du camion (vers la gauche).

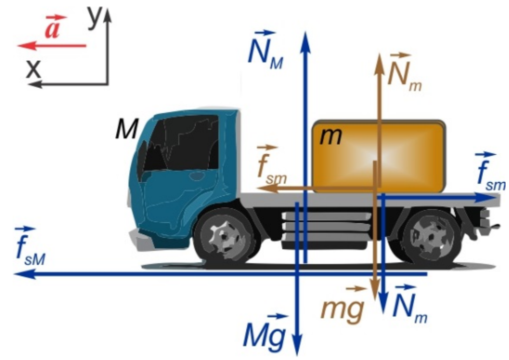
La caisse subit son poids (mg), et est en contact avec une surface, subissant 2 forces de cette surface (normale N_m et frottement f_{sm}).

Le camion subit son poids (Mg), et est en contact avec deux surfaces (le sol et la caisse), et subit 2 forces de chacune de ces deux surfaces (frottements f_{sm} et f_{sM}, et normales N_m et N_M).

Les forces f_m et N_m sont deux forces agissant sur chacun des deux objets, par le principe d'action-réaction. Elles agissent donc en sens contraires, mais ont le même module.

1 à 9 10 à 20 21 à 32

On peut alors rédiger les équations pour chacune des deux masses, distinctement. Les accélérations des deux masses sont identiques tant que la caisse ne glisse pas; il n'est donc pas nécessaire de distinguer les deux accélérations en *x*.



m $$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{N}_m + m\vec{g} + \vec{f}_{sm}$$

$$\sum F_x = ma_x = f_{sm} \qquad (1)$$

$$\sum F_y = ma_y = N_m - mg = 0 \qquad (2)$$

M $$\sum \vec{F} = M\vec{a} = \vec{N}_M + \vec{N}_m + M\vec{g} + \vec{f}_{sm} + \vec{f}_{sM}$$

$$\sum F_x = Ma_x = f_{sM} - f_{sm} \qquad (3)$$

$$\sum F_y = Ma_y = N_M - N_m - Mg = 0 \qquad (4)$$

Si le camion accélère à 1,50 m/s² et que la caisse ne glisse pas, la caisse accélère donc aussi à 1,50 m/s². L'équation (1) suffit donc pour calculer la force de frottement sur la caisse f_{sm} :

$$f_{sm} = ma_x = 750\ \text{kg} \times 1{,}50\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1125\ \text{N}$$

b) a = 7,36 m/s²

L'accélération maximale telle que la caisse ne glisse pas implique que la force de frottement statique entre la caisse et la plate-forme atteint sa valeur maximale $f_{sm\,max}$, liée au coefficient de frottement statique entre la caisse et la plate-forme :

$$f_{sm} = f_{sm\,\max} = \mu_s N_m$$

Les équations (1) et (3) peuvent être adaptées en conséquence. Aussi, l'accélération a étant entièrement parallèle à x, on a $a_x = a$ et les quatre équations du système sont alors :

(1) $$ma = \mu_s N_m \qquad (5)$$

(2) $$N_m - mg = 0 \qquad (6)$$

(3) $$Ma = f_{sM} - \mu_s N_m \qquad (7)$$

(4) $$N_M - N_m - Mg = 0 \qquad (8)$$

Les équations (5) et (6) suffisent pour déterminer l'accélération maximale de la caisse telle qu'elle ne glisse pas. On sait évidemment que l'accélération du camion sera la même, alors aucun autre calcul ne sera requis. Selon l'équation (6) :

$$N_m = mg \qquad (9)$$

En insérant ce résultat dans l'équation (5) :

$$ma = \mu_s (mg) \quad \rightarrow \quad a = \mu_s g = 0{,}750 \times 9{,}81\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} = 7{,}36\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

c) $f_{sM} = 38{,}6 \times 10^3$ N

On cherche la valeur du terme f_{sM} qui figure dans l'équation (7) développée en b). On a alors à nouveau besoin de l'expression de N_m de l'équation (9). En isolant f_{sM} :

$$f_{sM} = Ma + \mu_s N_m = Ma + \mu_s (mg)$$

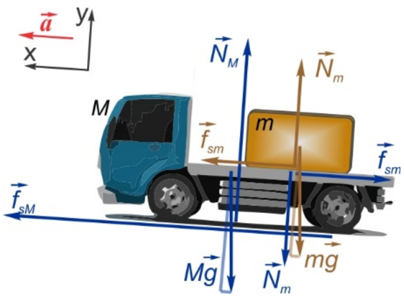
$$f_{sM} = 4500\ \text{kg} \times 7{,}36\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} + 0{,}750 \times 750\ \text{kg} \times 9{,}81\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} = 38{,}6 \times 10^3\ \text{N}$$

d) a = 6,38 m/s²

Dans le cas d'une route inclinée, on doit refaire en entier le schéma et les équations des forces :

m $$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{N}_m + m\vec{g} + \vec{f}_{sm}$$

$$\sum F_x = ma_x = f_{sm} - mg\sin\theta \qquad (10)$$



$$\sum F_y = ma_y = N_m - mg\cos\theta = 0 \qquad (11)$$

M $$\sum \vec{F} = M\vec{a} = \vec{N}_M + \vec{N}_m + M\vec{g} + \vec{f}_{sm} + \vec{f}_{sM}$$

$$\sum F_x = Ma_x = f_{sM} - f_{sm} - Mg\sin\theta \qquad (12)$$

$$\sum F_y = Ma_y = N_M - N_m - Mg\cos\theta = 0 \qquad (13)$$

Dans les équations (10) et (12), le terme f_{sm} est aussi égale à $\mu_s N_m$, si on est à la limite du glissement de la caisse (pour une accélération maximale). Les équations (10) et (11) suffisent pour calculer l'accélération maximale. D'abord, selon l'équation (11) :

(11) $$N_m = mg\cos\theta$$

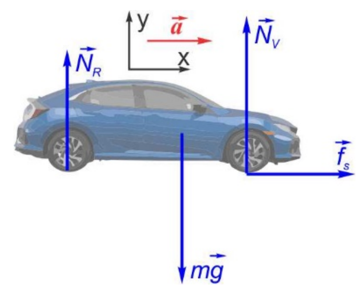
(10) $$ma = \mu_s N_m - mg\sin\theta \quad = \quad \mu_s\left(mg\cos\theta\right) - mg\sin\theta$$

$$a = \frac{\mu_s mg\cos\theta - mg\sin\theta}{m} \quad = \quad \mu_s g\cos\theta - g\sin\theta \quad = \quad g\left(\mu_s\cos\theta - \sin\theta\right)$$

$$a = 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\times\left(0{,}750\times\cos 5{,}50^\circ - \sin 5{,}50^\circ\right) \quad = \quad 6{,}38\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

6.6 Solution : Traction retour à la question ▲

a) a = 5,63 m/s²



La force normale sur les roues avant est différente de la normale sur les roues arrière, en raison de la répartition asymétrique du poids. Appelons N_V et N_R ces deux forces normales (en combinant les deux roues avant ensemble et les deux roues arrière ensemble).

La répartition du poids nous permet d'affirmer que la force normale totale se divise de la façon suivante :

$$N = N_V + V_R\text{ ,} \qquad (1)$$

avec $N_V = 0{,}62N$ (2)

et $N_R = 0{,}38N$ (3)

La force de frottement qui permet à l'auto d'accélérer se limite à celle des roues avant, limitée donc à la normale sur les roues avant seules.

Si on parle de l'accélération maximale, il s'agit donc de la force de frottement maximale, selon l'équation suivante :

$$f_{s\,\max} = \mu_s N_V \qquad (4)$$

Les équations des forces sur l'automobile, en tenant compte de cette répartition, sont :

m $$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{N}_V + \vec{N}_R + m\vec{g} + \vec{f}_s$$

$$\sum F_x = ma_x = f_s \qquad (5)$$

$$\sum F_y = ma_y = N_V + N_R - mg = 0 \qquad (6)$$

Dans l'équation (4), on peut insérer l'expression de la force de frottement maximale :

$$ma_x = f_s \quad = \quad f_{s\,\max} \quad = \quad \mu_s N_V \qquad (7)$$

Pour déterminer la valeur de N_V, on doit tenir compte des relations des équations (1), (2) et (3), insérées dans l'équation (6) :

(3) : $$N_R = 0{,}38N\text{ ,}$$

avec

(2) : $$N = \frac{N_V}{0{,}62}$$

Donc :

$$N_R = 0{,}38 \times \frac{N_V}{0{,}62} \quad = \quad \frac{0{,}38}{0{,}62} N_V$$

En insérant cette dernière relation dans l'équation (6) :

$$N_V + \left(\frac{0{,}38}{0{,}62} N_V \right) - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N_V = \frac{mg}{1 + \frac{0{,}38}{0{,}62}}$$

Finalement, via l'équation (7) :

$$ma_x = \mu_s N_V \quad = \quad \mu_s \times \left(\frac{mg}{1 + \frac{0{,}38}{0{,}62}} \right) \quad = \quad \frac{\mu_s mg}{1 + \frac{0{,}38}{0{,}62}}$$

$$a = \frac{1}{m} \times \frac{\mu_s mg}{1 + \frac{0{,}38}{0{,}62}} \quad = \quad \frac{\mu_s g}{1 + \frac{0{,}38}{0{,}62}} \qquad (8)$$

$$a = \frac{0{,}925 \times 9{,}81 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1 + \frac{0{,}38}{0{,}62}} \quad = \quad 5{,}63 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

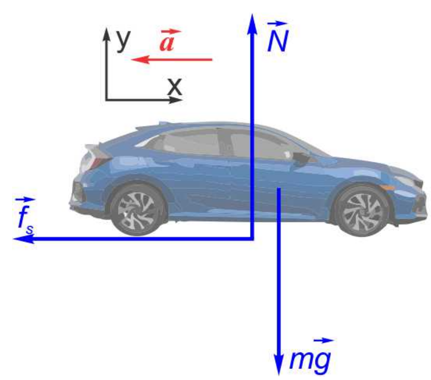
b) a = 4,20 m/s²

Si les pneus glissent, il s'agit plutôt de frottement cinétique, avec le coefficient de frottement cinétique μ_c = 0,690. Mais le schéma et les équations ont la même force, alors l'équation (8) développée en a) peut être utilisée, en changeant seulement le coefficient utilisé :

$$a = \frac{\mu_c g}{1 + \frac{0{,}38}{0{,}62}} \quad = \quad \frac{0{,}690 \times 9{,}81 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1 + \frac{0{,}38}{0{,}62}} \quad = \quad 4{,}20 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

c) d = 42,5 m

On doit procéder par cinématique en utilisant l'accélération produite par un freinage à la limite du glissement. En freinage, les 4 roues agissent au sol. L'accélération maximale en freinage demande donc une nouvelle analyse des forces. Puisque toutes les roues freinent, la force de frottement au sol, et donc l'accélération, sera différente. La normale des 4 roues interviendra dans le calcul de la force de frottement; il n'est donc plus nécessaire de subdiviser la force normale pour chacune de 4 roues. Le nouveau schéma et les équations sont :



m $$\sum \vec{F} = m\vec{a} = N + m\vec{g} + \vec{f}_s$$

$$\sum F_x = ma_x = -f_s \qquad (9)$$

$$\sum F_y = ma_y = N - mg = 0 \qquad (10)$$

Dans l'équation (9), on peut insérer l'expression de la force de frottement maximale pour cette situation :

$$ma_x = -f_s \quad = \ - f_{s\,\max} \quad = \ -\mu_s N \qquad (11)$$

L'équation (10) nous donne l'expression de la force normale qu'on pourra insérer dans la dernière équation :

(10) $$N = mg$$

(11) $$ma_x = -\mu_s mg \quad \Rightarrow \quad a = -\mu_s g$$

En considérant une position initiale x_0=0, l'accélération sera négative (a = -$\mu_s g$). Les paramètres et les équations de cinématique sont :

$$x_0 = 0$$
$$x = ??$$
$$v_0 = 100 \tfrac{\text{km}}{\text{h}}$$
$$v = 0$$
$$a = -\mu_s g$$
$$t = ?$$

$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \qquad (12)$$

$$v = v_0 + at \qquad (13)$$

On veut déterminer la position finale, qui coïncide avec la distance parcourue puisque ($x_0 = 0$). Puisque les deux équations sont requises, on pourra utiliser l'équation des vitesses au carré qui constitue un condensé des équations (1) et (2) :

$$v^2 = v_0^2 + 2a\left(x - x_0\right)$$

$$x = x_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \underbrace{x_0}_{=0} + \frac{\overbrace{v^2}^{=0} - v_0^2}{2\left(-\mu_s g\right)} = \frac{v_0^2}{2\mu_s g} \qquad (14)$$

$$x = \frac{v_0^2}{2\mu_s g} = \frac{\left(100 \tfrac{\text{km}}{\text{h}} \times \dfrac{1 \tfrac{\text{m}}{\text{s}}}{3{,}6 \tfrac{\text{km}}{\text{h}}}\right)^2}{2 \times 0{,}925 \times 9{,}81 \tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 42{,}5\ \text{m}$$

d) d = 57,0 m

Si les roues glissent, le traitement est le même qu'en c), où on remplace seulement le coefficient de frottement statique par le coefficient de frottement cinétique. On peut donc reprendre l'équation (14) où on fait ce changement mineur :

$$(14) \qquad x = \frac{v_0^2}{2\mu_c g} = \frac{\left(100 \tfrac{\text{km}}{\text{h}} \times \dfrac{1 \tfrac{\text{m}}{\text{s}}}{3{,}6 \tfrac{\text{km}}{\text{h}}}\right)^2}{2 \times 0{,}690 \times 9,81 \tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 57{,}0\ \text{m}$$

6.7 Solution : Ferrari Pista retour à la question ▲

a) μ_s = 1,65

On peut commencer par calculer l'accélération qui correspond aux données fournies sur cette auto, en traitant la cinématique. Les paramètres et équations sont :

$$x_0 = 0$$
$$x = ?$$
$$v_0 = 0$$
$$v = 100 \tfrac{\text{km}}{\text{h}}$$
$$a = ??$$
$$t = 2{,}9\ \text{s}$$

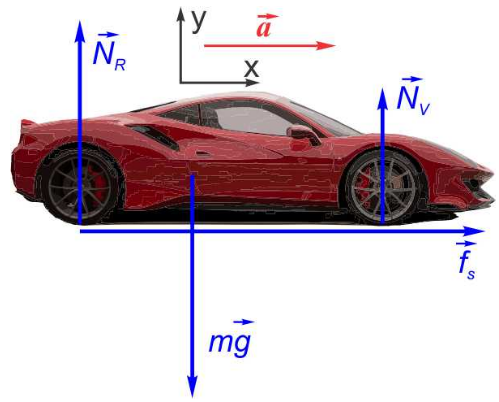
$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \qquad (1)$$

$$v = v_0 + at \qquad (2)$$

L'équation (2) suffit pour calculer l'accélération :

1 à 9 10 à 20 21 à 32

$$a = \frac{v - \overbrace{v_0}^{=0}}{t} = \frac{v}{t} \qquad (3)$$



Cette accélération nous permettra de trouver la force de frottement et donc le coefficient de frottement entre les pneus de la Ferrari et le sol (les pneus arrière seulement, puisque l'auto est une propulsion).

Comme au numéro précédent, on doit subdiviser la force normale sur l'auto pour le train avant et le train arrière. La répartition du poids entraîne :

$$N = N_V + V_R\,, \qquad (4)$$

avec $N_V = 0{,}41N$ (5)

et $N_R = 0{,}59N$ (6)

La force de frottement qui permet à l'auto d'accélérer se limite à celle des roues arrière, limitée donc à la normale sur les roues arrière seules.

On sous-entend que l'accélération est maximale, il s'agit donc de la force de frottement maximale, selon l'équation suivante :

$$f_{s\,\max} = \mu_s N_R \qquad (7)$$

Les équations des forces sur l'automobile, en tenant compte de cette répartition, sont :

m $$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{N}_V + \vec{N}_R + m\vec{g} + \vec{f}_s$$

$$\sum F_x = ma_x = f_s \qquad (8)$$

$$\sum F_y = ma_y = N_V + N_R - mg = 0 \qquad (9)$$

Dans l'équation (7), on peut insérer l'expression de la force de frottement maximale :

$$ma_x = f_s = f_{s\,\max} = \mu_s N_R \qquad (10)$$

Pour déterminer la valeur de N_R, on doit tenir compte des relations des équations (4), (5) et (6), insérées dans l'équation (9) :

(5) : $N_V = 0{,}41N\,,$

avec

(6) : $$N = \frac{N_R}{0{,}59}$$

Donc :

$$N_V = 0{,}41 \times \frac{N_R}{0{,}59} = \frac{0{,}41}{0{,}59} N_R \qquad (11)$$

En insérant cette dernière relation dans l'équation (9) :

$$\left(\frac{0{,}41}{0{,}59} N_R\right) + N_R - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N_R = 0{,}59mg$$

Finalement, via l'équation (10) :

$$ma_x = \mu_s N_R = \mu_s \times (0{,}59mg) = 0{,}59\mu_s mg$$

On peut alors isoler le coefficient de frottement μ_s pour le calculer, en ayant pris soin de remplacer l'accélération par v/t, selon l'équation (3) obtenue par cinématique :

$$\mu_s = \frac{ma}{0{,}59mg} = \frac{a}{0{,}59g} = \frac{\left(v/t\right)}{0{,}59g} = \frac{v}{0{,}59gt} \qquad (12)$$

$$\mu_s = \frac{v}{0{,}59gt} = \frac{100\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3{,}6\ \frac{\text{km}}{\text{h}}}}{0{,}59 \times 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 2{,}9\ \text{s}} = 1{,}65$$

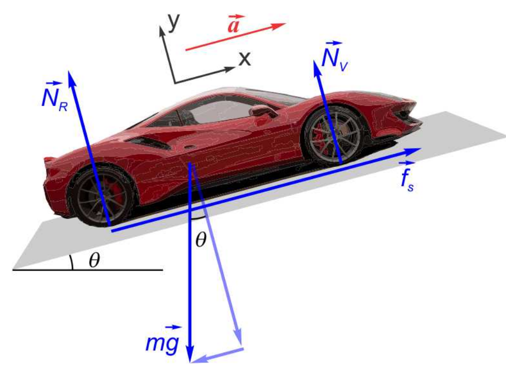
b) $t = 3{,}87$ s

Si la chaussée mouillée réduit le coefficient de frottement statique à 75% de sa valeur, on peut reprendre directement l'équation (11) de la partie a) et isoler plutôt la durée t, en utilisant un coefficient μ_s valant 75% du coefficient trouvé en a) :

$$\mu_s = \frac{v}{0{,}59gt} \Rightarrow \qquad t = \frac{v}{0{,}59\mu_s g} = \frac{100\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3{,}6\ \frac{\text{km}}{\text{h}}}}{0{,}59 \times (0{,}75 \times 1{,}65) \times 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 3{,}8\overline{7}\ \text{s}$$

c) $t = 3{,}74$ s

Si l'accélération de la Ferrari se fait dans une pente en montant, on doit réécrire les équations des forces. L'accélération est toujours donnée par



m $$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{N}_V + \vec{N}_R + m\vec{g} + \vec{f}_s$$

$$\sum F_x = ma_x = -mg\sin\theta + f_s \qquad (13)$$

$$\sum F_y = ma_y = N_V + N_R - mg\cos\theta = 0 \qquad (14)$$

L'équation (11) développée en a) est toujours valide, vu les relations entre la normale totale N, et les normales partielles N_V et N_R :

$$(11) \qquad N_V = \frac{0{,}41}{0{,}59} N_R$$

L'équation (14) devient :

$$\frac{0{,}41}{0{,}59} N_R + N_R = mg\cos\theta \qquad \Rightarrow \qquad N_R = \frac{mg\cos\theta}{1 + \frac{0{,}41}{0{,}59}}$$

L'équation (13), où la force de frottement est à sa maximale et tient compte de la nouvelle expression de la normale N_R, devient :

$$ma_x = -mg\sin\theta + f_s = -mg\sin\theta + \mu_s N_R = -mg\sin\theta + \mu_s(0{,}59mg\cos\theta)$$

En remplaçant l'accélération a_x par v/t, on peut isoler la durée t et la calculer :

$$a_x = -g\sin\theta + \mu_s(0{,}59g\cos\theta) = \frac{v}{t}$$

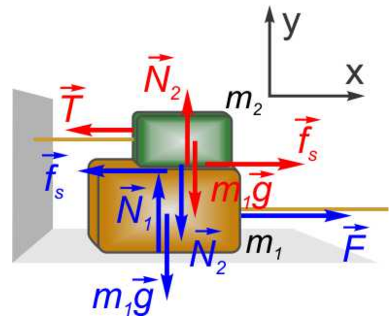
$$t = \frac{v}{(0{,}59 \times \mu_s \cos\theta - \sin\theta)g} = \frac{100\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3{,}6\ \frac{\text{km}}{\text{h}}}}{(0{,}59 \times 1{,}65 \times \cos 11{,}5° - \sin 11{,}5°) \times 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 3{,}74\ \text{s}$$

6.8 Solution : L'empilement retour à la question ▲

a) Non

Puisqu'on cherche à vérifier si la masse se mettra en mouvement, on ignore si la force de frottement est à sa valeur maximale ou si elle peut même empêcher le mouvement. On ne la remplace donc pas par $\mu_s N$. On devra plutôt déterminer sa valeur et la comparer à $f_{s\,max}$ pour valider si le frottement peut retenir m_1.

1 à 9 10 à 20 21 à 32



On doit tout d'abord rédiger les équations des forces pour chacune des deux masses, après avoir bien identifié les forces agissant sur chacune. La figure ci-contre illustre toutes les forces.

À ne pas oublier : la force normale N_2 qui supporte m_2 a aussi une force de réaction qui agit sur m_1 et de même grandeur que N_2; la force de frottement entre les deux blocs a aussi sa force de réaction qui doit faire partie des équations : chacun des blocs applique sur l'autre une force de frottement statique (tant qu'il n'y a pas de glissement). Puisque la masse 1 est tirée vers la droite, le frottement sur elle agit vers la gauche, alors que sur m_2, ce frottement agit vers la droite car elle est déposée sur une surface qui tente de se déplacer vers la droite.

Les équations pour les deux masses sont alors :

m_1 : $$\sum \vec{F} = m_1\vec{a}_1 = \vec{F} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{f}_s + m_1\vec{g}$$

$$\sum F_x = m_1 a_{1x} = F - f_s \qquad (1)$$

$$\sum F_y = m_1 \underbrace{a_{1y}}_{0} = N_1 - N_2 - m_1 g \qquad (2)$$

m_2 : $$\sum \vec{F} = m_2\vec{a}_2 = \vec{f}_s + \vec{T} + \vec{N}_2 + m_2\vec{g}$$

$$\sum F_x = m_2 a_{2x} = f_s - T \qquad (3)$$

$$\sum F_y = m_2 \underbrace{a_{2y}}_{0} = N_2 - m_2 g \qquad (4)$$

On veut évaluer la force f_s, c'est la force requise pour garder immobile la masse m_1. L'équation (1) à elle seule permet d'évaluer f_s si on sait qu'on applique une force F de 5 N. Puisque $a_{1x} = 0$:

$$f_s = F - m_1 a_{1x} \quad = \quad 5\,\text{N} - 1{,}5\,\text{kg} \times 0 \quad = \quad 5\,\text{N}$$

Vérifions maintenant si la force de frottement peut être aussi grande que 5 N, c'est-à-dire si $f_{s\,max} > 5$ N. On sait que $f_{s\,max} = \mu_s N$; mais on doit utiliser la bonne force normale puisqu'il y en a deux dans ce montage. Les surfaces où il y a du frottement sont celles entre les deux blocs, et c'est la force normale N_2 qui est la force de contact entre ces deux surfaces. Donc : $f_{s\,max} = \mu_s N_2$. On doit alors utiliser l'équation (4) pour évaluer N_2 :

(4) $$N_2 = m_2 g$$

$$f_{s\,\max} = \mu_s N_2 \quad = \quad \mu_s m_2 g \quad = \quad 0{,}475 \times 1{,}2\,\text{kg} \times 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad = \quad 5{,}59\,\text{N}$$

Puisque la force de frottement statique maximale est plus grande que la force de frottement requise pour retenir le bloc m_1, il ne se déplacera pas vers la droite.

b) $F = 5{,}59$ N

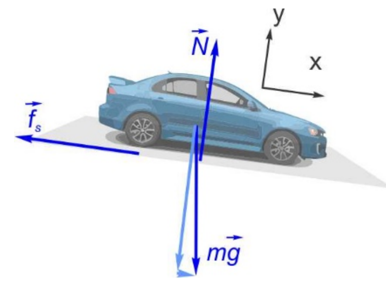
On a trouvé en a) que la force de frottement statique maximale est de 5,59 N. Puisque selon l'équation (1), la force appliquée F est égale à la force de frottement f_s tant que l'accélération est nulle, alors à la limite du mouvement, on aura :

$$F = f_{s\,\max} \quad = \quad 5{,}59\,\text{N}$$

6.9 Solution : Le stationnement retour à la question ▲

a) Oui

1 à 9 10 à 20 21 à 32



On doit vérifier si le coefficient de frottement statique est assez grand pour fournir une force de frottement permettant à l'accélération d'être nulle. On va donc calculer la force de frottement statique requise dans le cas limite où l'accélération est nulle (valeur maximale de la force de frottement), et la comparer à la force de frottement statique maximale permise par le coefficient de frottement statique. En a), les 4 roues sont freinées, alors la force normale entière sur l'automobile contribue à générer une force de frottement. On rédige les équations des forces en posant que l'accélération est nulle (le long du plan incliné) :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{N}_4 + m\vec{g} + \vec{f}_s$$

$$\sum F_x = m\underbrace{a_x}_{0} = 0 + mg\sin\theta - f_s \qquad (1)$$

$$\sum F_y = m\underbrace{a_y}_{0} = N_4 - mg\cos\theta + 0 \qquad (2)$$

Selon l'équation (1) seulement, on peut connaître la force de frottement statique requise :

$$f_s = mg\sin\theta$$

On ne connaît pas la masse de l'automobile, donc on ne peut calculer la valeur de la force de frottement. Mais on pourra tout de même la comparer à la valeur maximale possible, donnée par :

$$f_{s\,\max} = \mu_s N_4 \,,$$

avec une force normale donnée par l'équation (2) :

$$(2) \qquad N_4 = mg\cos\theta$$

$$f_{s\,\max} = \mu_s mg\cos\theta$$

Il ne reste qu'à déterminer si la force de frottement statique requise est à l'intérieur des limites possible pour la force de frottement statique entre ces deux surfaces. On doit vérifier si :

$$f_s \underset{?}{\leq} f_{s\,\max}$$

$$mg\sin\theta \underset{?}{\leq} \mu_s mg\cos\theta$$

$$\sin\theta \underset{?}{\leq} \mu_s \cos\theta$$

$$\sin 5,5° \underset{?}{\leq} 0,17 \times \cos 5,5°$$

Le calcul nous dit que cette inégalité est vérifiée. Donc l'automobile pourra demeurer immobile sur cette pente.

b) Non

Si seules les deux roues arrière sont freinées par le frein de stationnement (comme sur la plupart des automobiles), seule la normale sur les roues arrière contribue à générer du frottement. Dans les équations, séparons la normale totale selon les deux trains de roues :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{N}_{2v} + \vec{N}_{2r} + m\vec{g} + \vec{f}_s$$

$$\sum F_x = m\underbrace{a_x}_{0} = 0 + 0 + mg\sin\theta - f_s \qquad (3)$$

$$\sum F_y = m\underbrace{a_y}_{0} = N_{2v} + N_{2r} - mg\cos\theta + 0 \qquad (4)$$

La force requise pour garder l'auto immobile est la même qu'en a), selon l'équation (3) :

$$f_s = mg\sin\theta$$

On exprime la force de frottement maximale générée par la normale sur 2 roues seulement :

$$f_{s\,\max} = \mu_s N_{2r} \,,$$

1 à 9 10 à 20 21 à 32

avec une force normale N_{2r} donnée par l'équation (4) :

$$(4) \qquad N_{2r} = mg\cos\theta - N_{2v}$$

Et puisque $N_{2v} = N_{2r}$, on peut écrire :

$$N_{2r} = mg\cos\theta - N_{2r}$$

$$2N_{2r} = mg\cos\theta$$

$$N_{2r} = \tfrac{1}{2}mg\cos\theta$$

Comme quoi la normale sur les deux roues arrière seules ne porte que la moitié du poids total.
La force de frottement statique maximale est alors :

$$f_{s\,\max} = \mu_s N_{2r}$$

$$f_{s\,\max} = \mu_s \tfrac{1}{2}mg\cos\theta$$

La comparaison entraîne :

$$f_s \underset{?}{\leq} f_{s\,\max}$$

$$mg\sin\theta \underset{?}{\leq} \mu_s \tfrac{1}{2}mg\cos\theta$$

$$\sin\theta \underset{?}{\leq} \tfrac{1}{2}\mu_s\cos\theta$$

$$\sin 5{,}5° \underset{?}{\leq} \tfrac{1}{2}\times 0{,}17\times\cos 5{,}5°$$

Cette inégalité n'est pas vérifiée. L'auto se mettra donc à glisser si on réduit le frottement aux seules roues arrière.

c) Impossible

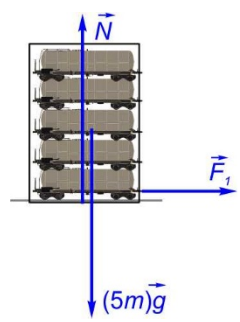
Logiquement, si deux roues ne sont pas suffisantes, en frottement statique, pour maintenir l'auto en place, elles ne pourront pas non plus tirer l'automobile vers le haut de la pente.

6.10 Solution : Le train

retour à la question ▲

a) a = 0,533 m/s²

Le principe important dans cette situation est qu'une tension d'attelage agit sur toute la masse qui est derrière cet attelage. Ainsi, la tension d'attelage derrière la locomotive est la force qui fait accélérer les 5 wagons, sans égard au fait que c'est la locomotive qui applique cette tension sur le wagon #1 (appelons cette tension F_1). On peut donc considérer que la seule masse impliquée dans cette portion du problème est la masse des 5 wagons. Dit autrement, les 5 wagons accélérés par cette force pourraient former une seule et unique masse combinée (voir figure ci-contre).



Les équations des forces sur cette masse sont alors :

$$\sum\vec{F} = (5m)\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{N} + (5m)\vec{g}$$

$$\sum F_x = (5m)a_x = F_1 \qquad (1)$$

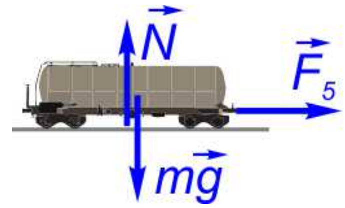
$$\sum F_y = (5m)\underbrace{a_y}_{0} = N - (5m)g \qquad (2)$$

L'équation (1) suffit alors à calculer l'accélération :

$$(1) \qquad a = \frac{F_1}{(5m)} = \frac{4{,}8\times10^5\ \text{N}}{5\times180\times10^3\ \text{kg}} = 0{,}53\overline{3}\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

b) F_5 = 9,60×10⁴ N

Le dernier attelage possède une tension qui ne fait accélérer que le dernier wagon. Les équations des forces sur ce wagon sont :



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{F}_5 + \vec{N} + m\vec{g}$$

$$\sum F_x = ma_x = F_5 \qquad (3)$$

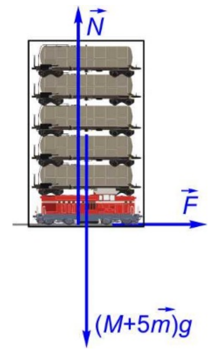
$$\sum F_y = m\underbrace{a_y}_{0} = N - mg \qquad (4)$$

L'équation (3) permet de calculer la force F_5 dans l'attelage devant le wagon #5 :

$$(3) \qquad F_5 = ma = 180\times10^3\ \text{kg}\times0{,}533\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9{,}60\times10^4\ \text{N}$$

c) $F = 6{,}19\times10^5$ N

La force de frottement agissant sur la locomotive est la force qui fait accélérer le train en entier. C'est la seule force horizontale extérieure agissant sur le train (voir figure ci-haut). On peut alors considérer que la masse impliquée est la masse totale du train (les tensions dans les attelages individuels sont des forces internes et n'ont aucun effet) C'est donc équivalent à réunir la masse de la locomotive et des 5 wagons en une seule masse combinée (voir figure ci-contre). Les équations des forces sont alors :



$$\sum \vec{F} = (M+5m)\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} + (5m)\vec{g}$$

$$\sum F_x = (M+5m)a_x = F \qquad (5)$$

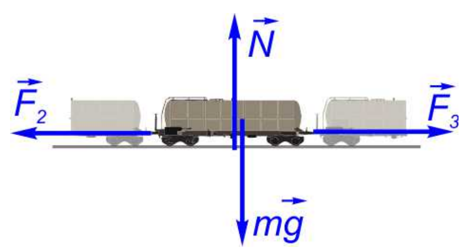
$$\sum F_y = (M+5m)\underbrace{a_y}_{0} = N - (M+5m)g \qquad (6)$$

L'équation (5) permet de calculer la force F_5 qui fait accélérer le train :

$$F = (M+5m)a = \left(261\times10^3\ \text{kg}+5\times180\times10^3\ \text{kg}\right)\times0{,}533\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} = 6{,}19\times10^5\ \text{N}$$

d) ΣF = 9,60×10⁴ N

Déterminer la force résultante sur une masse ne nécessite pas toujours de connaître toutes les forces qui agissent sur elle. Dans ce cas-ci, puisqu'on connaît la valeur de la masse ainsi que son accélération, la force résultante est directement donnée par le produit de la masse et de l'accélération. Les équations des forces sur le 3ᵉ wagon sont :



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{F}_3 + \vec{F}_2 + m\vec{g}$$

$$\sum F_x = ma_x = F_3 - F_2$$

(7)

$$\sum F_y = m\underbrace{a_y}_{0} = N - mg \qquad (8)$$

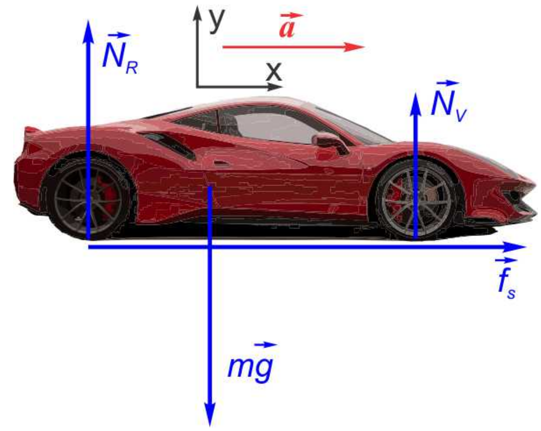
Dans l'équation (7), on s'intéresse donc uniquement à la portion $\Sigma F = ma_x$. En y, les deux seules forces s'annulent; la force résultante totale se limite donc à la somme des forces selon x :

$$\sum F_x = ma_x = 180\times10^3\ \text{kg}\times0{,}533\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9{,}60\times10^4\ \text{N}$$

1 à 9 10 à 20 21 à 32

6.11 Solution : La Ferrari Pista retour à la question ▲

Non



Pour déterminer si la force appliquée au sol par la voiture sera aussi grande que le permet le moteur (16,6 kN), il suffit de calculer la force de frottement statique maximale sur les roues motrices (arrière) et la force de frottement cinétique (toujours sur les roues arrière seules). Dans ce cas comme en général, le coefficient de frottement statique maximal est supérieur au coefficient de frottement cinétique, ce qui suggère que si le frottement statique ne permet pas d'appliquer cette force, le frottement cinétique ne le fera pas non plus. Rédigeons les équations des forces sur la voiture, en considérant que la voiture est à la limite du dérapage, pour quantifier la force présente dans ce cas :

m $$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{N}_V + \vec{N}_R + m\vec{g} + \vec{f}_s$$

$$\sum F_x = ma_x = f_s \qquad (1)$$

avec $$f_s = f_{s\,\max} = \mu_s N_R \qquad (2)$$

$$\sum F_y = ma_y = N_V + N_R - mg = 0 \qquad (3)$$

Puisqu'on cherche seulement à évaluer $f_{s\,max}$, on doit d'abord déterminer N_R et utiliser l'équation (3). Puisque la normale totale se divise en N_R et N_V (c'est-à-dire que $N = N_R+N_V$), on peut écrire :

$$N_V = 0{,}41N \qquad (4)$$

$$N_R = 0{,}59N \qquad (5)$$

Pour déterminer N_R, c'est N_V qu'on exprimera en fonction de N_R. Selon l'équation (5) :

(5) $$N = \frac{N_R}{0{,}59}$$

N est inséré dans l'équation (4) :

(4) $$N_V = 0{,}41N_V \quad = \quad 0{,}41\frac{N_R}{0{,}59} \quad = \quad \frac{0{,}41}{0{,}59}N_R$$

Dans l'équation (3) :

$$\frac{0{,}41}{0{,}59}N_R + N_R - mg = 0$$

$$N_R = 0{,}59mg$$

Finalement, cette expression de N_R dans l'équation (2) entraîne :

$$f_s = f_{s\,\max} = \mu_s N_R \quad = \quad \mu_s\left(0{,}59mg\right) \quad = \quad 1{,}25 \times 0{,}59 \times 1385\,\text{kg} \times 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad = \quad 10{,}0 \times 10^3\ \text{N}$$

La force de frottement statique est donc limitée à 10 kN, alors qu'on dit que le moteur peut entraîner les roues pour appliquer au sol 16,6 kN. Les roues vont donc déraper avant d'atteindre la force maximale de 16,6 kN.

Il va sans dire que le frottement cinétique n'offre pas une plus grande force maximale. Selon la dernière équation, en adaptant seulement le coefficient de frottement :

$$f_c = \mu_c N_R \quad = \quad 0{,}87\left(0{,}59mg\right) \quad = \quad 0{,}87 \times 0{,}59 \times 1385\,\text{kg} \times 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad = \quad 6{,}97 \times 10^3\ \text{N}$$

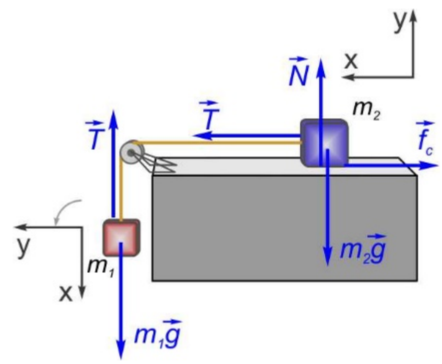
6.2 CORDES ET POULIES

6.12 Solution : Poulie #1 retour à la question ▲

a) a = 3,92 m/s² et T = 11,8 N

1 à 9 10 à 20 21 à 32

On doit tout d'abord identifier et illustrer toutes les forces agissant sur chacune des deux masses. Et en choisissant des systèmes d'axes faisant en sorte que les deux masses se déplaceront selon l'axe x (l'axe x positif, même, si la masse suspendue descend), l'accélération sera la même pour les deux masses. Par ailleurs, le frottement cinétique est nul en a), mais on peut tout de suite rédiger des équations qui seront aussi valide s'il y a du frottement comme en b). Donc écrivons les équations comme s'il y avait du frottement, et on considèrera en a) un coefficient μ_c nul. Les équations n'auront donc pas à être réécrites en b). Faisons également une figure qui tient compte de ce frottement (frottement qui s'oppose au glissement vers la gauche de m_2, donc agissant vers la droite).



Les équations des forces, pour les deux masses, sont :

m_1 : $$\sum \vec{F} = m_1\vec{a}_1 = \vec{T} + m_1\vec{g}$$

$$\sum F_x = m_1 a_{1x} = -T + m_1 g \qquad (1)$$

$$\sum F_y = m_1 \underbrace{a_{1y}}_{0} = 0$$

m_2 : $$\sum \vec{F} = m_2\vec{a}_2 = \vec{T} + \vec{N} + m_2\vec{g} + \vec{f}_c$$

$$\sum F_x = m_2 a_{2x} = T + 0 + 0 - f_c \qquad (2)$$

$$\sum F_y = m_2 \underbrace{a_{2y}}_{0} = 0 + N - m_2 g + 0 \qquad (3)$$

avec $$f_c = \mu_c N \qquad (4)$$

Puisqu'on considère que la longueur de la corde est constante, les déplacements, vitesses et accélérations des masses sont identiques en module, et toutes orientées selon x. On peut donc affirmer $a_{1x} = a_{2x} = a$.

En insérant l'expression de la force de frottement (équation (4)) dans l'équation (2), on obtient :

$$m_2 a = T - \mu_c N \,,$$

avec une normale N donnée par l'équation (3) et égale à $m_2 g$, donc la même équation devient :

$$m_2 a = T - \mu_c m_2 g$$

Cette dernière équation forme un système de 2 équations et 2 inconnues avec l'équation (1). Si on isole T dans cette équation et remplace T dans l'équation (1), on aura :

$$T = m_2 a + \mu_c m_2 g \quad = \quad m_2\left(a + \mu_c g\right) \qquad (5)$$

(1) $$m_1 a = -\left(m_2 a + \mu_c m_2 g\right) + m_1 g$$

On peut alors isoler l'accélération pour la calculer (on se rappelle qu'en a), on considère que le coefficient de frottement cinétique est nul) :

$$a = \frac{m_1 g - \mu_c m_2 g}{m_1 + m_2} \quad = \quad \frac{m_1 - \mu_c m_2}{m_1 + m_2} \times g \qquad (6)$$

$$a = \frac{2\text{ kg} - 0 \times 3\text{ kg}}{2\text{ kg} + 3\text{ kg}} \times 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad = \quad 3{,}92\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

On peut reprendre l'équation (5) pour calculer la tension :

$$T = m_2 a + \mu_c m_2 g \quad = \quad m_2\left(a + \mu_c g\right) \quad = \quad 3\text{ kg}\left(3{,}92\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} + 0 \times 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \quad = \quad 11{,}8\text{ N}$$

b) a = 2,16 m/s² et T = 15,3 N

On peut reprendre telles quelles les équations (6) et (5) développées en a) car le mouvement implique encore une chute de la masse m_2 et les équations prévoient l'insertion d'un coefficient de frottement :

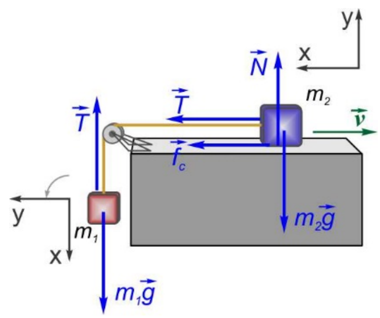
1 à 9 10 à 20 21 à 32

(6) $$a=\frac{m_1-\mu_c m_2}{m_1+m_2}\times g \quad = \quad \frac{2\,\text{kg}-0{,}3\times 3\,\text{kg}}{2\,\text{kg}+3\,\text{kg}}\times 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad = \quad 2{,}16\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

(5) $$T=m_2\left(a+\mu_c g\right) \quad = \quad 3\,\text{kg}\times\left(2{,}16\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}+0{,}3\times 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \quad = \quad 15{,}3\,\text{N}$$

c) a = 5,69 m/s² et T = 8,24 N

On doit faire quelques ajustements aux équations initiales des forces développées en a) (équations 1 à 4), car le mouvement est en sens contraire du sens suggéré en a) et b). Refaisons d'ailleurs la figure pour placer la force de frottement dans la bonne direction, vers la gauche, pour s'opposer au mouvement de m_2 vers la droite.



Si la masse 2 se déplace vers la droite, l'accélération sera dirigée assurément vers la gauche, car la tension ET la force de frottement sont dirigées vers la gauche. Il est donc pertinent d'utiliser les mêmes systèmes d'axes qu'auparavant.

Les nouvelles équations des forces, pour les deux masses, sont :

m_1 : $$\sum\vec{F}=m_1\vec{a}_1=\vec{T}+m_1\vec{g}$$

$$\sum F_x=m_1a_{1x}=-T+m_1g \qquad (7)$$

$$\sum F_y=m_1\underbrace{a_{1y}}_{0}=0$$

m_2 : $$\sum\vec{F}=m_2\vec{a}_2=\vec{T}+\vec{N}+m_2\vec{g}+\vec{f}_c$$

$$\sum F_x=m_2a_{2x}=T+0+0+f_c \qquad (8)$$

$$\sum F_y=m_2\underbrace{a_{2y}}_{0}=0+N-m_2g+0 \qquad (9)$$

avec $$f_c=\mu_c N \qquad (10)$$

Seul le signe devant f_c, dans l'équation (8), diffère des cas précédents. L'algèbre ayant mené à l'équation (6) sera donc la même, avec comme seule différence le signe devant le terme $\mu_c m_2$:

(6*) $$a=\frac{m_1-\mu_c m_2}{m_1+m_2}\times g \quad = \quad \frac{2\,\text{kg}+0{,}3\times 3\,\text{kg}}{2\,\text{kg}+3\,\text{kg}}\times 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad = \quad 5{,}69\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

On peut alors calculer la tension avec l'équation (5) ajutée de la même façon :

(5*) $$T=m_2\left(a-\mu_c g\right) \quad = \quad 3\,\text{kg}\times\left(5{,}69\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}-0{,}3\times 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \quad = \quad 8{,}24\,\text{N}$$

d) Faux

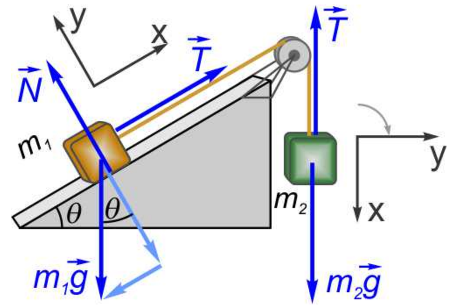
Si la masse n'accélérait pas, il est vrai qu'il y aurait équilibre entre T et m_1g. Mais elle accélère. C'est l'équation (7) développée en c) qui le démontre :

$$m_1a_{1x}=-T+m_1g$$

Selon cette équation, T ne sera égal à mg que si a = 0. S'il y a une accélération, c'est justement parce qu'il y a une force résultante non nulle, c'est-à-dire que T et mg ne s'annulent pas.

6.13 Solution : Poulie #2 retour à la question ▲

a = 1,40 m/s² vers le bas



On doit tout d'abord identifier et illustrer toutes les forces agissant sur chacune des deux masses. Et en choisissant des systèmes d'axes faisant en sorte que les deux masses se déplaceront selon l'axe x, on peut alors décomposer les forces qui doivent l'être (voir figure ci-contre).

Les équations des forces, pour les deux masses, sont :

m_1 : $$\sum \vec{F} = m_1\vec{a}_1 = \vec{T} + \vec{N} + m_1\vec{g}$$

$$\sum F_x = m_1 a_{1x} = T + 0 - m_1 g \sin\theta \qquad (1)$$

$$\sum F_y = m_1 \underbrace{a_{1y}}_{0} = 0 + N - m_1 g \cos\theta \qquad (2)$$

m_2 : $$\sum \vec{F} = m_2\vec{a}_2 = \vec{T} + m_2\vec{g}$$

$$\sum F_x = m_2 a_{2x} = -T + m_2 g \qquad (3)$$

$$\sum F_y = m_2 \underbrace{a_{2y}}_{0} = 0 \qquad (4)$$

Puisqu'on considère que la longueur de la corde est constante, les déplacements, vitesses et accélérations des masses sont identiques; aussi, les accélérations n'étant qu'en x, on peut écrire : $a_{1x} = a_{2x} = a$. L'équation (4) ne contient rien d'utile, et les équations (1) à (3) deviennent :

(1) $$m_1 a = T - m_1 g \sin\theta \qquad (5)$$

(2) $$0 = N - m_1 g \cos\theta \qquad (6)$$

(3) $$m_2 a = -T + m_2 g \qquad (7)$$

Les équations (5) et (7) contiennent les mêmes deux inconnues, dont l'accélération que l'on cherche (l'autre étant la tension). On peut donc isoler la tension dans l'une des deux équations (choisissons la (7) car elle est plus courte), et remplacer T dans l'équation (5) :

(7) $$T = m_2 g - m_2 a$$

(5) $$m_1 a = \underbrace{\left(m_2 g - m_2 a\right)}_{T} - m_1 g \sin\theta$$

On peut maintenant isoler l'accélération qui apparait 2 fois dans la nouvelle équation :

$$m_1 a + m_2 a = m_2 g - m_1 g \sin\theta$$

$$a = \frac{g\left(m_2 - m_1 \sin\theta\right)}{m_1 + m_2}$$

$$a = \frac{9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times \left(1{,}5\text{ kg} - 2\text{ kg} \times \sin 30°\right)}{1{,}5\text{ kg}+2\text{ kg}} = 1{,}40\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

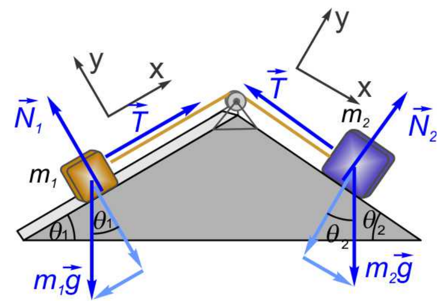
C'est l'accélération de chacune des deux masses, par rapport aux axes utilisés. Une accélération positive indique que les masses accélèrent vers la direction de l'axe x, c'est donc une accélération vers le bas pour la masse m_2.

6.14 Solution : Poulie #3 retour à la question ▲

a = 0,700 m/s², vers la droite

On doit tout d'abord identifier et illustrer toutes les forces agissant sur chacune des deux masses. Et en choisissant des systèmes d'axes faisant en sorte que les deux masses se déplaceront selon l'axe x, on peut alors décomposer les forces qui doivent l'être (voir figure ci-contre). Puisque les deux forces normales sur les deux masses sont différentes, on doit leur donner des indices pour ne pas les confondre.

Les équations des forces, pour les deux masses, sont :



m_1 :

$$\sum \vec{F} = m_1\vec{a}_1 = \vec{T} + \vec{N}_1 + m_1\vec{g}$$

$$\sum F_x = m_1 a_{1x} = T + 0 - m_1 g \sin\theta_1 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = m_1 \underbrace{a_{1y}}_{0} = 0 + N_1 - m_1 g \cos\theta_1 \qquad (2)$$

m_2 :

$$\sum \vec{F} = m_2\vec{a}_2 = \vec{T} + \vec{N}_2 + m_2\vec{g}$$

$$\sum F_x = m_2 a_{2x} = -T + 0 + m_2 g \sin\theta_2 \qquad (3)$$

$$\sum F_y = m_2 \underbrace{a_{2y}}_{0} = 0 + N_2 - m_2 g \cos\theta_2 \qquad (4)$$

Puisqu'on considère que la longueur de la corde est constante, les déplacements, vitesses et accélérations des masses sont identiques; aussi, les accélérations n'étant qu'en x, on peut écrire : $a_{1x} = a_{2x} = a$. Les équation (1) et (3) forment un système de deux équations et 2 inconnues. On peut utiliser ces deux équations pour trouver l'accélération. Et puisque les deux masses sont identiques, on peut même poser $m_1 = m_2 = m$. Réécrivons ces équations simplifiées :

(1) $ma = T - mg\sin\theta_1$ (5)

(3) $ma = -T + mg\sin\theta_2$ (6)

Isolons T dans l'équation (5) et remplaçons T dans l'équation (6), pour isoler a ensuite :

(5) $T = ma + mg\sin\theta_1$

(6) $ma = -\underbrace{\left(ma + mg\sin\theta\right)}_{T} + mg\sin\theta_2$

$$ma + ma = -mg\sin\theta + mg\sin\theta_2$$

$$2a = g\left(-\sin\theta + \sin\theta_2\right)$$

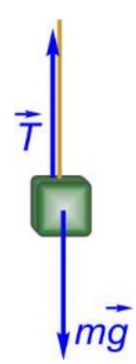
$$a = \frac{g\left(-\sin\theta + \sin\theta_2\right)}{2} = \frac{9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times \left(-\sin 30° + \sin 40°\right)}{2} = 0{,}700\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Cette accélération étant positive, on sait qu'elle se produira vers le sens positif de l'axe x, donc vers la droite pour les deux masses.

6.15 Solution : Les 3 dynamomètres retour à la question ▲

Partout 19,6 N

Dans les 3 montages, à chaque endroit où une masse est suspendue immobile à une corde, la tension est nécessairement égale au poids. La démonstration pour chacune des 4 masses suspendues est :



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g} = 0$$

$$\sum F_y = m\underbrace{a_y}_{0} = T - mg = 0$$

Selon cette dernière équation :

$$T = mg \quad = \quad 2\,\text{kg} \times 9{,}81\,\tfrac{\text{N}}{\text{kg}} \quad = \quad 19{,}62\,\text{N}$$

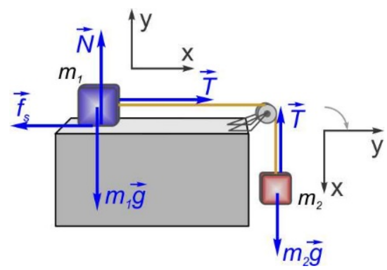
Puisque « *la tension dans une corde est la même en tout point* », on constate rapidement qu'en a) et en b), la tension doit être de 19,62 N. En c) cependant, il faut interpréter plus minutieusement le principe de la tension. Mais ce qui fixe une corde à l'extrémité opposée de celle où il y a une masse n'a pas d'importance pour la tension qui supporte la masse. Et si cette fixation de l'autre extrémité est une autre masse de même valeur, la corde est tout autant immobilisée, et la tension est tout de même équivalente au poids simple de l'une des masses. Donc la tension en c) est également de 19,62 N.

6.16 Solution : Poulie #4

retour à la question ▲

Oui

On doit vérifier si la force de frottement statique permet d'empêcher le mouvement des masses. On calculera d'abord la force de frottement statique requise pour empêcher le mouvement, et on la comparera là la force de frottement statique maximale. En accord avec le diagramme de forces ci-contre, les équations des forces sont :



m_1 : $$\sum \vec{F} = m_1\vec{a}_1 = \vec{T} + \vec{N} + m_1\vec{g} + \vec{f}_c$$

$$\sum F_x = m_1 a_{1x} = T - f_s \qquad (1)$$

$$\sum F_y = m_1 \underbrace{a_{1y}}_{0} = N - m_1 g \qquad (2)$$

m_2 : $$\sum \vec{F} = m_2\vec{a}_2 = \vec{T} + m_2\vec{g}$$

$$\sum F_x = m_2 a_{2x} = -T + m_2 g \qquad (3)$$

$$\sum F_y = m_2 \underbrace{a_{2y}}_{0} = 0$$

Puisque les accélérations des deux masses sont de même module ($a_{1x} = a_{2x} = a$), les équations (1) et (3) réunies comportent deux équations et permettent de calculer la force de frottement statique requise (pour que l'accélération demeure nulle) :

(3) $$T = +m_2 g - m_2 \underbrace{a_{2x}}_{0} \quad = \quad m_2 g$$

(1) $$m_1 \underbrace{a_{1x}}_{0} = (m_2 g) - f_s$$

$$f_s = m_2 g \quad = \quad 0{,}500\,\text{kg} \times 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad = \quad 4{,}905\,\text{N}$$

Vérifions maintenant si la force de frottement statique maximale est supérieur à la force requise pour maintenir les blocs immobiles. La force de frottement statique maximale est donnée par $f_{s\,max} = \mu_s N$, avec une force normale pouvant être donnée par l'équation (2) :

$$N = m_1 g$$

$$f_{s\,\max} = \mu_s N \quad = \quad \mu_s m_1 g \quad = \quad 0{,}550 \times 0{,}750\,\text{kg} \times 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad = \quad 4{,}05\,\text{N}$$

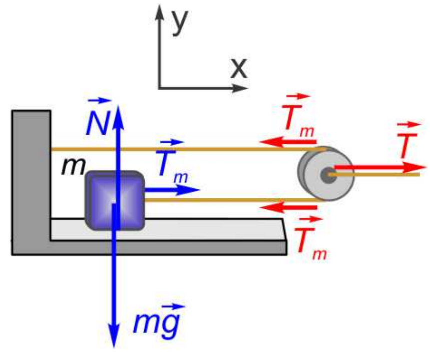
La force de frottement statique maximale ne peut atteindre la valeur requise pour empêcher le mouvement. Les blocs se mettront donc en mouvement.

1 à 9 10 à 20 21 à 32

6.17 Solution : Poulie #5

retour à la question ▲

T = 13,5 N



La poulie est mobile. La tension de part et d'autre de la poulie (il y a deux cordes) sera donc différente. Le rapport des tensions sera évalué en traitant les équations des forces sur la poulie, dont on négligera la masse. Appelons T_m la tension dans la corde fixée à la masse, et T la tension de la corde fixée à la poulie (telle que suggérée dans l'énoncé) :

m : $$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{T}_m + \vec{N} + m_1\vec{g}$$

$$\sum F_x = ma_x = T_m \qquad (1)$$

$$\sum F_y = m\underbrace{a_y}_{0} = N - mg \qquad (2)$$

Poulie : $$\sum \vec{F} = m_P\vec{a}_P = \vec{T} + 2\vec{T}_m$$

$$\sum F_x = \underbrace{m_P}_{0} a_{Px} = T - 2T_m = 0 \qquad (3)$$

$$\sum F_y = m_P \underbrace{a_{Py}}_{0} = 0$$

Selon l'équation (3), $T = 2T_m$. L'équation (1) peut nous donner une expression de la tension T_m :

$$T_m = ma_x$$

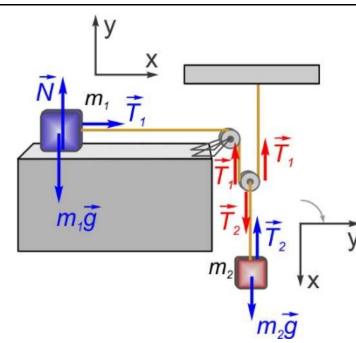
Insérée dans l'équation (3), on trouve :

$$T = 2T_m = 2\times\left(ma_x\right) = 2\times 3\,\text{kg}\times 2{,}25\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} = 13{,}5\,\text{N}$$

6.18 Solution : Poulie #6

retour à la question ▲

a) a_1 = 4,53 m/s²



La poulie qui porte la masse 2 est mobile, ce qui entraînera une différence de tension dans les cordes et des accélérations différentes pour les deux masses. Rédigeons les équations des masses en distinguant les accélérations et les tensions (voir diagramme de forces ci-contre) :

m_1 : $$\sum \vec{F} = m_1\vec{a}_1 = \vec{T}_1 + \vec{N} + m_1\vec{g}$$

$$\sum F_x = m_1a_{1x} = T_1 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = m_1\underbrace{a_{1y}}_{0} = N - m_1g \qquad (2)$$

m_2 : $$\sum \vec{F} = m_2\vec{a}_2 = \vec{T}_2 + m_2\vec{g}$$

$$\sum F_x = m_2a_{2x} = -T_2 + m_2g \qquad (3)$$

$$\sum F_y = m_2\underbrace{a_{2y}}_{0} = 0$$

Pour établir le lien entre les tensions T_1 et T_2, on peut rédiger les équations des forces sur la poulie :

1 à 9 10 à 20 21 à 32

m_{poulie} : $\sum \vec{F} = m_P \vec{a}_P = \vec{T}_2 + 2\vec{T}_1$

$$\sum F_x = \underbrace{m_P}_{0} a_{Px} = T_2 - 2T_1 = 0$$

d'où : $T_2 = 2T_1$ (4)

Le rapport des accélérations étant l'inverse du rapport des tensions de part et d'autre de la poulie, on a également :

$a_1 = 2a_2$ (5)

Les équations (4) et (5) nous donnent des expression de T_2 et de a_1 qu'on peut insérer dans les équations (3) et (1) :

(3) $m_2 a_2 = -(2T_1) + m_2 g$ (6)

(1) $m_1 (2a_2) = T_1$ (7)

La nouvelle équation (7) donne une expression de T_1 qu'on peut insérer directement dans l'équation (6) :

(6) $m_2 a_2 = -(2 \times (m_1 \cdot 2a_2)) + m_2 g$

Si on isole la seule inconnue a_2, on trouve :

$$a_2 = \frac{m_2 g}{(m_2 + 4m_1)} = \frac{3\text{ kg} \times 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{(3\text{ kg} + 4 \times 2{,}5\text{ kg})} = 2{,}26 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

C'est l'accélération de la masse 1 que l'on cherche (a_1), et l'équation (5) peut maintenant nous la donner :

$$a_1 = 2a_2 = 2 \times 2{,}26 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 4{,}53 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

b) T_1 = 11,3 N

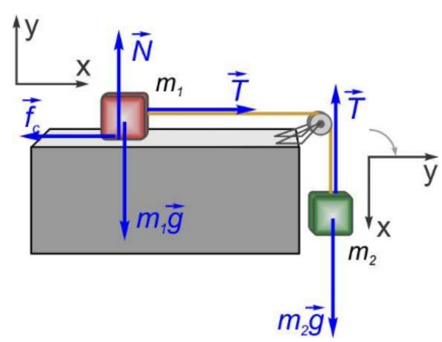
La tension dans la corde fixée à la masse 1 est la tension qu'on a appelée T_1. L'équation (7) nous la donne directement, maintenant que l'accélération a_2 est connue :

$$T_1 = 2m_1 a_2 = 2 \times 2{,}5\text{ kg} \times 2{,}26 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 11{,}3\text{ N}$$

6.19 Solution : Deux scénarios retour à la question ▲

a) m_1 = 1,83 kg

On comprend que si la masse 2 change, l'accélération du système changera, pour une même valeur de m_1 et du coefficient de frottement cinétique. Appelons A et B ces deux scénarios, avec a_1 = 3,4 m/s² et a_2 = 5,6 m/s². Rédigeons les équations des forces pour ces deux scénarios distinctement, selon le diagramme des forces illustré ci-contre. À noter que la tension sera forcément différente dans les deux scénarios. A priori, si seuls μ_c et m_1 sont constantes :



m_1 : $\sum \vec{F} = m_1 \vec{a}_A = \vec{T}_A + \vec{N}_A + m_1 \vec{g} + \vec{f}_{cA}$

$$\sum F_x = m_1 a_{xA} = T_A - f_{cA} \quad (1)$$

$$\sum F_y = m_1 \underbrace{a_y}_{0} = N_A - m_1 g = 0 \quad (2)$$

m_2 : $\sum \vec{F} = m_{2A} \vec{a}_A = \vec{T}_A + m_{2A} \vec{g}$

$$\sum F_x = m_{2A} a_{xA} = -T_A + m_{2A} g \quad (3)$$

$$\sum F_y = m_{2A} \underbrace{a_{2y}}_{0} = 0$$

Avec une force de frottement dans l'équation (1) donnée par $f_{cA} = \mu_c N_A$. Selon l'équation (2), la normale est donnée par $N_A = m_1 g$, et on constante que la normale sera constante, ainsi que la force de frottement cinétique :

$$f_c = \mu_c N_A \quad = \quad \mu_c m_1 g$$

L'équation (1) devient :

(1) $$m_1 a_{xA} = T_A - \mu_c m_1 g$$

On peut alors isoler T_A pour faire la substitution dans l'équation (3) :

$$T_A = m_1 a_A + \mu_c m_1 g$$

(3) $$m_{2A} a_A = -\left(m_1 a_A + \mu_c m_1 g\right) + m_{2A} g \qquad (4)$$

On peut obtenir une équation de la même forme pour le scénario B, qui sera :

$$m_{2A} a_A = -\left(m_1 a_A + \mu_c m_1 g\right) + m_{2A} g \qquad (5)$$

Les équations (4) et (5) contiennent ensemble 2 inconnues. Pour trouver d'abord m_1, isolons μ_c dans ces deux équations pour égaler les deux expressions et évaluer m_1 :

(4) $$\mu_c = \frac{m_{2A} g - m_{2A} a_A - m_1 a_A}{m_1 g}$$

(5) $$\mu_c = \frac{m_{2B} g - m_{2B} a_B - m_1 aB}{m_1 g}$$

$$\frac{m_{2A} g - m_{2A} a_A - m_1 a_A}{m_1 g} = \mu_c = \frac{m_{2B} g - m_{2B} a_B - m_1 a_B}{m_1 g}$$

$$\frac{m_{2A} g - m_{2A} a_A - m_1 a_A}{\cancel{m_1 g}} = \frac{m_{2B} g - m_{2B} a_B - m_1 a_B}{\cancel{m_1 g}}$$

$$m_1 = \frac{\left(m_{2B} - m_{2A}\right) g + m_{2A} a_A - m_{2B} a_B}{\left(a_B - a_A\right)} = \frac{\left(4\text{ kg} - 2\text{ kg}\right) \times 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 2\text{ kg} \times 3{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 4\text{ kg} \times 5{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{5{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 3{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1{,}83\text{ kg}$$

b) $\mu_c = 0{,}369$

La masse m_1 étant trouvée en a), on peut évaluer rapidement le coefficient à partir des équations (4) ou (5) :

(4) $$\mu_c = \frac{m_{2A} g - m_{2A} a_A - m_1 a_A}{m_1 g} = \frac{2\text{ kg} \times 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 2\text{ kg} \times 3{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 1{,}83\text{ kg} \times 3{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1{,}83\text{ kg} \times 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0{,}369$$

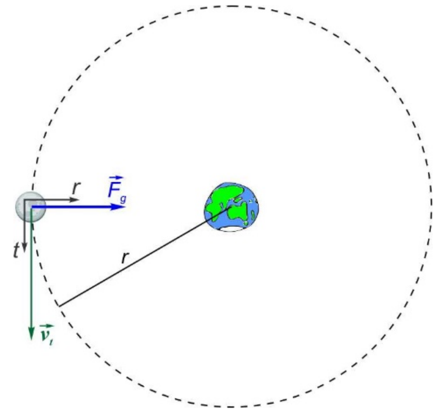
6.3 DYNAMIQUE DU MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORME

6.20 Solution : Le mois lunaire retour à la question ▲

$F_g = 2{,}01 \times 10^{20}$ N

[1 à 9](#) [10 à 20](#) [21 à 32](#)

La force gravitationnelle sur la Lune est la seule force agissant sur la Lune, qui décrit un cercle. Les équations des forces sur la Lune, en fonction des axes radial et tangentiel, et en tenant compte de la définition de l'accélération centripète, sont :



$$m: \qquad \sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{F}_g$$

$$\sum F_r = ma_r = F_g = \frac{mv_t^2}{r} \qquad (1)$$

$$\sum F_t = ma_t = 0 \qquad (2)$$

L'équation (1) contient la force F_g qu'on veut évaluer, mais on doit exprimer la vitesse en fonction de la durée et du rayon de la trajectoire, ou utiliser l'autre définition de l'accélération centripète :

$$a_r = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

L'équation (1) devient :

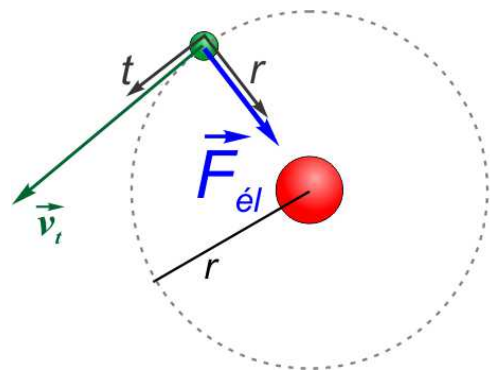
$$F_g = m \cdot \frac{4\pi^2 r}{T^2} = 7{,}36\times10^{22}\ \text{kg}\times\frac{4\pi^2\times3{,}84\times10^{8}\ \text{m}}{\left(27{,}3\ \text{j}\times\frac{24\ \text{h}}{\text{j}}\times\frac{3\,600\ \text{s}}{\text{h}}\right)^2} = 2{,}01\times10^{20}\ \text{N}$$

6.21 Solution : L'orbite électronique

retour à la question ▲

$v = 2{,}19\times10^6$ m/s

La force électrique est la seule force agissant sur l'électron, et elle agit vers le centre. C'est la force centripète. En prenant soin de remplacer l'accélération centripète par v_t^2/r, les équations des forces sur l'électron sont :



$$m: \qquad \sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{F}_{él}$$

$$\sum F_r = ma_r = F_{él} = \frac{mv_t^2}{r} \qquad (1)$$

$$\sum F_t = ma_t = 0 \qquad (2)$$

L'équation (1) possède la vitesse comme seule inconnue :

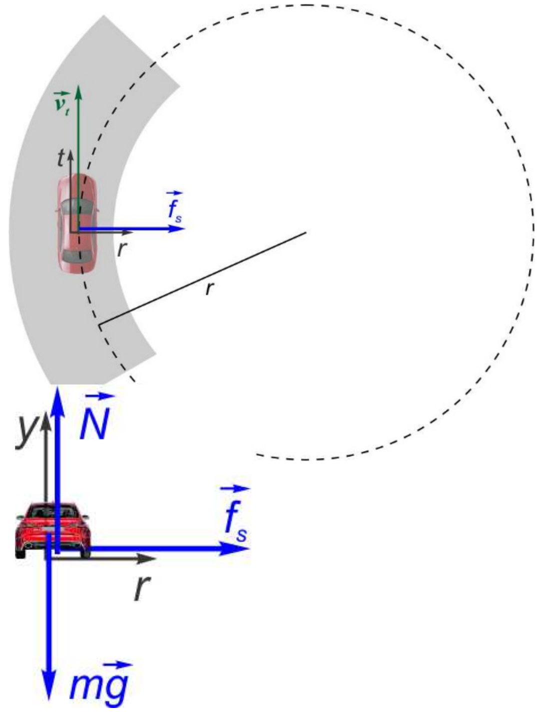
$$(1) \qquad v_t = \sqrt{\frac{F_{él}\times r}{m}} = \sqrt{\frac{8{,}25\times10^{-8}\ \text{N}\times5{,}29\times10^{-11}\ \text{m}}{9{,}109\times10^{-31}\ \text{kg}}} = 2{,}19\times10^{6}\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

6.22 Solution : Les g latéraux

retour à la question ▲

a) r = 137 m

Trois forces agissent sur l'automobile : le frottement statique agit vers le centre (sans nécessairement être à sa valeur maximale), et la normale et le poids agissent verticalement, c'est-à-dire perpendiculairement au cercle qui contient la trajectoire. Deux schémas peuvent être faits, mais la vue qui contient toutes les forces est une vue de face ou de l'arrière de la voiture. Les équations des forces sur l'automobile sont :



$$m : \qquad \sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{f}_s + \vec{N} + m\vec{g}$$

$$\sum F_r = ma_r = f_s = \frac{mv_t^2}{r} \qquad (1)$$

$$\sum F_y = ma_y = N - mg = 0 \qquad (2)$$

Quand on indique que la voiture subit une accélération latérale de 0,25g, c'est l'accélération centripète (le côté de l'auto est dirigé vers le centre du cercle), et la grandeur de l'accélération centripète est donc :

$$a_r = 0{,}25 \times 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

La simple équation de l'accélération centripète permet d'insérer cette valeur et d'évaluer le rayon de courbure :

$$a_r = \frac{v_t^2}{r} = 0{,}25g$$

$$r = \frac{v_t^2}{0{,}25g} = \frac{\left(66{,}0\,\tfrac{\text{km}}{\text{h}} \times \dfrac{1\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}}{3{,}6\,\tfrac{\text{km}}{\text{h}}}\right)^2}{0{,}25 \times 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 137\text{ m}$$

b) f_s = 3 225 N

On peut utiliser l'équation (1) établie en a) pour évaluer le module de la force de frottement :

$$f_s = ma_r = 1\,315\text{ kg} \times \left(0{,}25 \times 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 3\,225\text{ N}$$

c) μ_s = 0,250

En supposant qu'on soit à la limite du glissement, on a :

$$f_s = f_{s\,\max} = \mu_s N$$

Selon l'équation (2) : $N = mg$,

Donc : $$\mu_s = \frac{f_s}{N} = \frac{f_s}{mg} = \frac{3\,225\text{ N}}{1\,315\text{ kg} \times 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0{,}250$$

6.23 Diagramme de forces en ligne (Partie II)

retour à la question ▲

Exercices en ligne

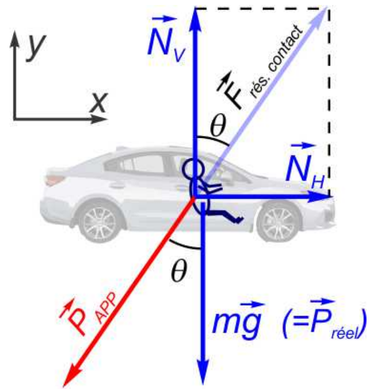
6.24 Solution : Toujours plus lourd

retour à la question ▲

a) P_{APP}/F_g = 1,09, θ = 22,9°

1 à 9 10 à 20 21 à 32

On cherche le rapport P_{APP}/F_g, on veut donc obtenir une expression du poids apparent. On doit d'abord identifier toutes les forces agissant sur le passager. S'il accélère avec la voiture le passager subit une force vers l'avant. On peut attribuer cette force au dossier du siège, qui pousse le passager horizontalement vers l'avant. C'est une force normale. La passager subit donc une force normale vers le haut (N_V), et une vers l'avant (N_H). Ce sont les deux seules forces de contact (voir figure ci-contre).



Le poids apparent est de même grandeur et orientation opposée à la résultante des forces de contact ($F_{rés\ contact}$ sur la figure ci-contre). On veut donc quantifier les deux forces normales et évaluer l'orientation de leur somme.

On rédige les équations des forces pour parvenir à évaluer les deux forces normales :

$$m: \qquad \sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{N}_V + \vec{N}_H + m\vec{g}$$

$$\sum F_x = ma_x = N_H \qquad (1)$$

$$\sum F_y = m\underbrace{a_y}_{=0} = N_V - mg \quad = \quad 0 \qquad (2)$$

On réalise que sans la masse du passager, on ne peut obtenir des quantités exactes pour les forces normales. Mais lors de la comparaison du poids apparent avec le poids réel, la masse m s'annulera. Selon la figure, le module du poids apparent est égal au module de la somme $F_{rés\ contact}$, donc :

$$P_{APP} = \sqrt{N_V^2 + N_H^2}$$

Les équations (1) et (2) donnent des expressions de ces deux forces normales :

$$P_{APP} = \sqrt{(mg)^2 + (ma_x)^2} \quad = \quad m\sqrt{g^2 + a_x^2}$$

Puisqu'on veut établir le rapport P_{APP}/F_g, on peut utiliser l'expression précédente et écrire :

$$\frac{P_{APP}}{F_g} = \frac{m\sqrt{g^2 + a_x^2}}{mg} \quad = \quad \frac{\sqrt{g^2 + a_x^2}}{g}$$

On peut alors procéder au calcul :

$$\frac{P_{APP}}{F_g} = \frac{\sqrt{g^2 + a_x^2}}{g} \quad = \quad \frac{\sqrt{\left(9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2 + \left(4{,}15\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2}}{9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \quad = \quad 1{,}09$$

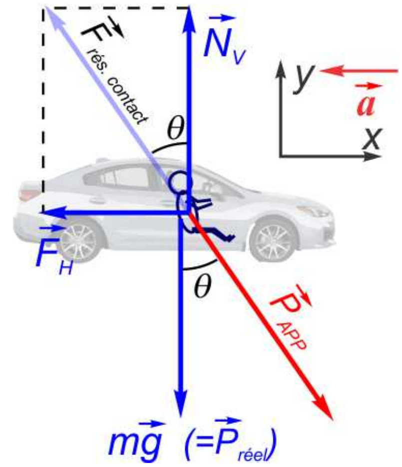
L'angle entre le poids apparent et la verticale, identifié θ sur la figure, est donné par trigonométrie, en utilisant les expressions de N_V et N_H :

$$\tan\theta = \frac{N_H}{N_V}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{N_H}{N_V} \quad = \quad \tan^{-1}\frac{ma_x}{mg} \quad = \quad \tan^{-1}\frac{a_x}{g} \quad = \quad \tan^{-1}\frac{4{,}15\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \quad = \quad 22{,}9°$$

b) $P_{APP}/F_g = 1{,}20$, $\theta = 33{,}6°$

[1 à 9](#) [10 à 20](#) [21 à 32](#)



À nouveau établissons les équations des forces. Pour la force horizontale agissant sur le passager, rigoureusement, il ne s'agit pas que d'une force normale comme en a) pour une accélération vers l'avant. Il y a également un frottement sur le siège qui empêche les fesses du passager de glisser vers l'avant de l'auto, et donc qui applique une force vers l'arrière. Mais le siège est généralement incliné vers l'arrière, ce qui procure également une force normale qui comporte une composante horizontale vers l'arrière. Somme toute, sans égard à la proportion des différentes forces, on peut désigner par force horizontale les différentes forces qui agissent horizontalement (voir F_H sur la figure ci-contre). Les équations des forces sont alors :

$$m: \qquad \sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{N}_V + \vec{F}_H + m\vec{g}$$

$$\sum F_x = ma_x = -F_H \qquad (3)$$

$$\sum F_y = m\underbrace{a_y}_{=0} = N_V - mg = 0 \qquad (4)$$

Cependant, on ignore la valeur de l'accélération. On doit d'abord la déterminer par traitement de la cinématique :

$x_0 = 0$
$x = 14{,}2\ \text{m}$
$v_0 = \frac{50}{3{,}6}\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$
$v = \frac{10}{3{,}6}\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$
$a = ??$
$t = ?$

L'équation des vitesses carrées permet d'évaluer l'accélération :

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v^2 - v_0^2}{2(x - x_0)} = \frac{\left(\frac{10}{3{,}6}\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2 - \left(\frac{50}{3{,}6}\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2}{2 \times (14{,}2\ \text{m} - 0)} = -6{,}52\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

L'accélération étant connue, on peut utiliser les équations (3) et (4) pour obtenir une expression du module du poids apparent. Selon la figure, le module du poids apparent est égal au module de la somme $F_{rés\ contact}$, donc :

$$P_{APP} = \sqrt{N_V^2 + F_H^2} = \sqrt{(mg)^2 + (-ma_x)^2} = m \cdot \sqrt{g^2 + a_x^2} \qquad (5)$$

Le rapport P_{APP}/F_g est alors :

$$\frac{P_{APP}}{F_g} = \frac{m\sqrt{g^2 + a_x^2}}{mg} = \frac{\sqrt{g^2 + a_x^2}}{g} = \frac{\sqrt{\left(9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2 + \left(-6{,}52\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2}}{9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1{,}20$$

Et l'angle entre le poids apparent et la verticale :

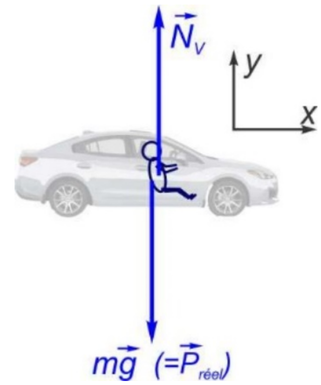
$$\tan\theta = \frac{F_H}{N_V}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{F_H}{N_V} = \tan^{-1}\frac{-ma_x}{mg} = \tan^{-1}\frac{-a_x}{g} = \tan^{-1}\frac{-\left(-6{,}52\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)}{9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 33{,}6°$$

c) $P_{APP}/F_g = 1{,}00$, $\theta = 0°$

En roulant à vitesse constante, les seules forces agissant sur le passager sont la force normale verticale et son poids. Si le poids apparent est de même module que la force normale, il sera donc aussi de même module que le poids réel mg. Si on le démontre à l'aide des équations :

1 à 9 10 à 20 21 à 32



m : $$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{N}_V + m\vec{g}$$

$$\sum F_x = ma_x = 0 \qquad (6)$$

$$\sum F_y = m\underbrace{a_y}_{=0} = N_V - mg = 0 \qquad (7)$$

Le poids apparent se limitant à la normale verticale, le rapport P_{APP}/F_g sera :

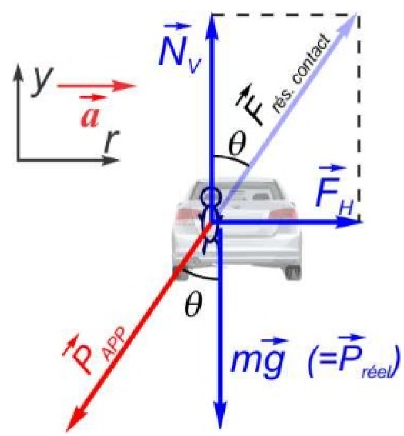
$$\frac{P_{APP}}{F_g} = \frac{N_V}{mg} = \frac{mg}{mg} = 1{,}00$$

Et l'angle entre le poids apparent et la verticale sera donc nul ($\theta = 0°$).

d) $P_{APP}/F_g = 1{,}06$, $\theta = 19{,}5°$

L'accélération sera latérale, mais le principe est le même que précédemment. Sur le passager, la force horizontale vient à la fois d'une force normale du siège (dans lequel on s'enfonce et s'appuie latéralement) et d'une force de frottement du siège. Représentons par F_H la force horizontale totale (voir figure ci-contre, où l'auto tourne vers la droite).

À nouveau établissons les équations des forces, dans le contexte où la force horizontale est à la fois une force centripète (sur un axe radial) :



m : $$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{N}_V + \vec{F}_H + m\vec{g}$$

$$\sum F_r = ma_r = F_H = \frac{mv_t^2}{r} \qquad (8)$$

$$\sum F_y = m\underbrace{a_y}_{=0} = N_V - mg = 0 \qquad (9)$$

On peut reprendre l'équation (5) développée en b) :

$$P_{APP} = \sqrt{N_V^2 + F_H^2} = m \cdot \sqrt{g^2 + a_r^2} \ ,$$

avec une accélération centripète a_r qu'on peut évaluer par :

$$a_r = \frac{v_t^2}{r} = \frac{\left(\frac{75}{3{,}6}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{125\ \text{m}} = 3{,}47\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Le rapport P_{APP}/F_g est alors :

$$\frac{P_{APP}}{F_g} = \frac{m\sqrt{g^2 + a_r^2}}{mg} = \frac{\sqrt{g^2 + a_r^2}}{g} = \frac{\sqrt{\left(9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2 + \left(3{,}47\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2}}{9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1{,}06$$

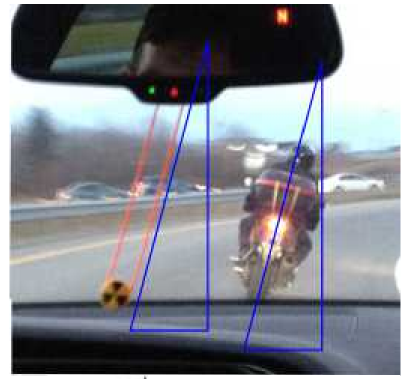
Et l'angle entre le poids apparent et la verticale :

$$\tan\theta = \frac{F_H}{N_V}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{F_H}{N_V} = \tan^{-1}\frac{-ma_x}{mg} = \tan^{-1}\frac{-a_x}{g} = \tan^{-1}\frac{3{,}47\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 19{,}5°$$

6.25 Solution : L'horizon incliné retour à la question ▲

$r \approx 88{,}8$ m

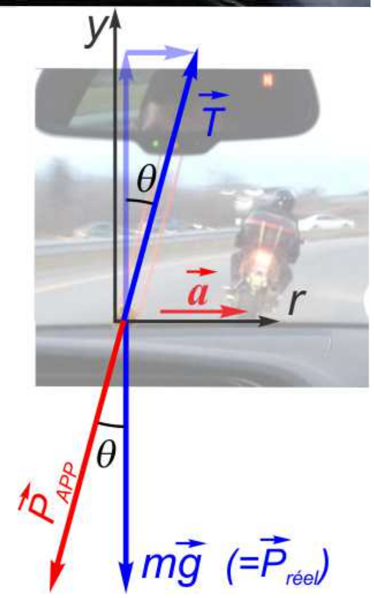


On doit évaluer l'inclinaison du pendule ou de la mode (c'est la même) par rapport à la verticale pour connaître l'orientation du poids apparent. Par quelques mesures sur la photo agrandie (voir triangle rectangle sur la figure ci-contre), on trouve que l'inclinaison est d'environ 15°.

Cette inclinaison à l'équilibre est aussi l'angle du poids apparent par rapport à la verticale (voir seconde figure).

Le poids apparent étant lié aux forces de contact uniquement (excluant donc la force gravitationnelle), dans le cas du pendule il s'agit de la force de tension seule. Établissons les équations des forces où on aura décomposé la tension en composante radiale et composante verticale :

m : $$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g}$$



$$\sum F_r = ma_r = T\sin\theta = \frac{mv_t^2}{r} \qquad (1)$$

$$\sum F_y = m\underbrace{a_y}_{=0} = T\cos\theta - mg = 0 \qquad (2)$$

On réunit les deux équations. Isolons T dans l'équation (2) pour l'insérer dans l'équation (1) :

(2) $$T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

(1) $$\left(\frac{mg}{\cos\theta}\right)\sin\theta = \frac{mv_t^2}{r}$$

On peut isoler le rayon dans cette dernière équation :

$$r = \frac{v_t^2}{g\tan\theta} = \frac{\left(\frac{55}{3{,}6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\times\tan 15°} = 88{,}8\,\mathrm{m}$$

C'est évidemment une estimation puisque l'inclinaison considérée pour le pendule ou la moto était une estimation.

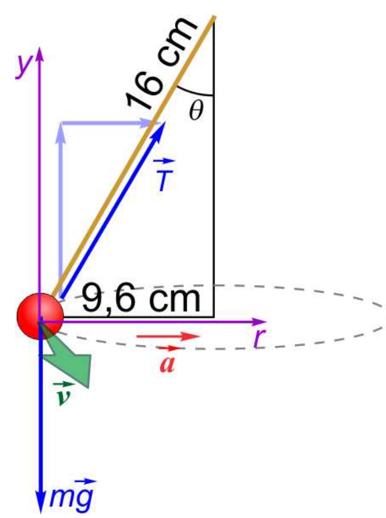
6.26 Solution : Le pendule

retour à la question ▲

v = 0,840 m/s

La représentation la plus utile en est une où on voit le pendule de côté. On ne voit pas sa trajectoire circulaire de face, mais ce qu'il est le plus important de voir ce sont les forces, et aucune force tangentielle n'agit; le pendule ne subit que deux forces, la tension du fil et son poids (voir figure ci-contre). L'angle (θ sur la figure) peut être évalué par trigonométrie à partir des dimensions du fil et de la trajectoire circulaire :

$$\sin\theta = \frac{9{,}6\ \mathrm{cm}}{16\ \mathrm{cm}} = 0{,}6 \quad \rightarrow \quad \theta = \sin^{-1} 0{,}6 = 36{,}9°$$



Son mouvement est un mouvement circulaire, et la vitesse recherchée est la vitesse tangentielle, qui sort du plan de l'illustration. Les équations des forces sont :

m : $$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g}$$

$$\sum F_r = ma_r = T\sin\theta = \frac{mv_t^2}{r} \qquad (1)$$

$$\sum F_y = m\underbrace{a_y}_{=0} = T\cos\theta - mg = 0 \qquad (2)$$

On réunit les deux équations. Isolons T dans l'équation (2) pour l'insérer dans l'équation (1) :

1 à 9 10 à 20 21 à 32

(2) $$T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

(1) $$\left(\frac{mg}{\cos\theta}\right)\sin\theta = \frac{mv_t^2}{r}$$

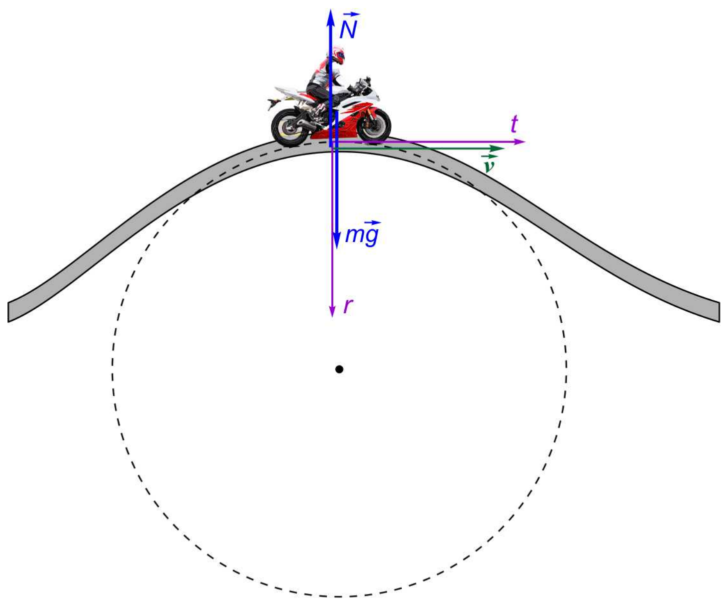
On peut isoler la vitesse dans cette dernière équation :

$$v_t = \sqrt{gr\tan\theta} \quad = \quad \sqrt{9{,}81\,\tfrac{\text{N}}{\text{kg}} \times 0{,}096\,\text{m} \times \tan 36{,}9°} \quad = \quad 0{,}840\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

6.27 Solution : Ballade en moto retour à la question ▲

a) v = 17,4 m/s

Le fait que l'appui au sol soit réduit d'un facteur 2 nous informe que c'est la force normale qui est réduite d'un facteur deux. On doit comprendre que c'est par rapport à la valeur habituelle de la force normale qu'il y a réduction, donc par rapport à la force normale sur un véhicule qui ne subit pas d'accélération verticale, dans lequel cas on a $N = mg$. On doit donc considérer pour la situation étudiée que :



$$N = \tfrac{1}{2}mg$$

Les seules forces agissant sur la moto au sommet du button sont la force normale vers le haut et la force gravitationnelle vers le bas. Au sommet du button, ces deux forces sont orientées radialement (voir figure ci-contre). Les équations des forces sur la moto à l'instant au sommet sont :

$$m : \sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g}$$

$$\sum F_r = ma_r = -N + mg \quad = \quad \frac{mv_t^2}{r} \qquad (1)$$

$$\sum F_t = m\underbrace{a_t}_{=0} = 0$$

En insérant l'expression de la normale réduite dans l'équation (1), on a :

$$-\tfrac{1}{2}mg + mg \quad = \quad \frac{mv_t^2}{r}$$

On peut alors isoler et calculer la vitesse qui entraîne cette égalité :

$$v_t = \sqrt{\frac{gr}{2}} \quad = \quad \sqrt{\frac{9{,}81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} \times 62\,\text{m}}{2}} \quad = \quad 17{,}4\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) r = 31,0 m

S'il est tout juste sur le point de quitter le sol au sommet d'un button, on doit comprendre que c'est la normale qui est réduite à zéro. On peut considérer la même équation (1) qu'en a), mais avec une normale nulle (N = 0). On aura alors :

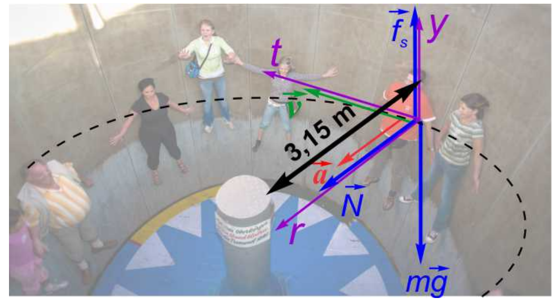
$$\underbrace{-N}_{=0} + mg \quad = \quad \frac{mv_t^2}{r}$$

$$r = \frac{v_t^2}{g} \quad = \quad \frac{\left(17{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{9{,}81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}}} \quad = \quad 31{,}0\,\text{m}$$

6.28 Solution : Le rotor retour à la question ▲

N = 1881 N

On rédige les équations des forces sur le passager, et la force normale à évaluer fera partie de l'équation des forces centripète, car la surface contre laquelle le passager est adossé est perpendiculaire à la direction radiale :



$$m: \sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{N} + \vec{f}_s + m\vec{g}$$

$$\sum F_r = ma_r = N = \frac{mv_t^2}{r} \qquad (1)$$

$$\sum F_y = ma_y = f_s - mg = 0 \qquad (2)$$

Dans l'équation (1), la vitesse étant inconnue, on peut remplacer l'accélération centripète par l'expression qui tient compte de la période :

$$a_r = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

L'équation (1) peut alors s'écrire :

$$ma_r = N = m \times \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

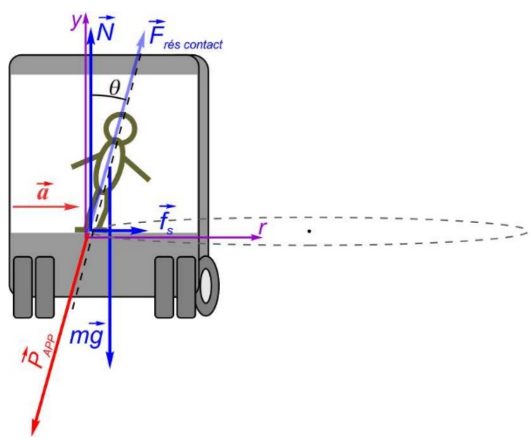
$$N = m \times \frac{4\pi^2 r}{T^2} = 80\ \text{kg} \times \frac{4\pi^2 \times 3{,}15\ \text{m}}{(2{,}30\ \text{s})^2} = 1881\ \text{N}$$

6.29 Solution : Le voyage en autobus retour à la question ▲

a) θ = 32,3°

Ce qui nous permet d'être en équilibre autrement qu'à la verticale dans une courbe est le frottement statique au sol. La vue dans laquelle on aperçoit toutes les forces est une vue par l'arrière de l'autobus, alors qu'on voit le passager se pencher latéralement pour obtenir une force centripète du contact au sol.

Les équations des forces sur le passager sont :



$$m: \qquad \sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{N} + \vec{f}_s + m\vec{g}$$

$$\sum F_r = ma_r = f_s = \frac{mv_t^2}{r} \qquad (1)$$

$$\sum F_y = m\underbrace{a_y}_{=0} = N - mg = 0 \qquad (2)$$

Par l'équation (1), on peut quantifier f_s, et par l'équation (2), on peut quantifier N. Mais l'angle d'inclinaison du passager exige qu'on analyse son poids apparent. Son inclinaison à l'équilibre est en ligne avec le poids apparent, ce poids apparent étant l'équilibrante de la force normale et de la force de frottement. On peut donc écrire :

$$\tan\theta = \frac{f_s}{N} \quad \rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\frac{f_s}{N} \qquad (3)$$

Selon les expressions obtenues des équations (1) et (2) :

[1 à 9](#) [10 à 20](#) [21 à 32](#)

$$\theta = \tan^{-1}\frac{f_s}{N} \quad = \quad \tan^{-1}\frac{\left(\frac{mv_t^2}{r}\right)}{mg} \quad = \quad \tan^{-1}\frac{v_t^2}{gr} \quad = \quad \tan^{-1}\frac{\left(\frac{56}{3{,}6}\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2}{9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\times 39\text{ m}} \quad = \quad 32{,}3°$$

b) $\mu_s = 0{,}632$

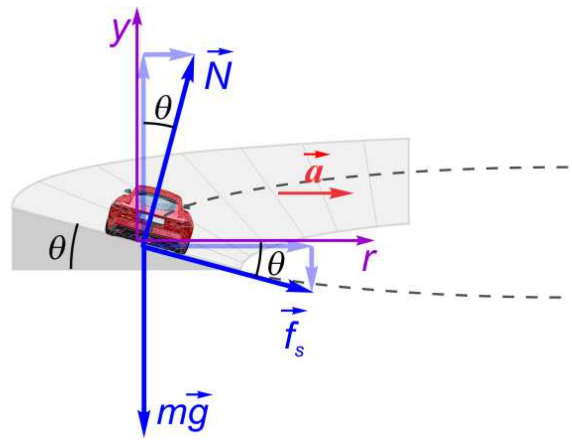
Si on cherche le coefficient de frottement statique minimal, on doit comprendre qu'on est à la limite du glissement et que $f_s = f_{s\,\max} = \mu_s N$. En insérant cette expression dans l'équation (3), on a :

$$\theta = \tan^{-1}\frac{f_s}{N} \quad = \quad \tan^{-1}\frac{\mu_s N}{N} \quad = \quad \tan^{-1}\mu_s$$

$$\mu_s = \tan\theta \quad = \quad \tan 32{,}3° \quad = \quad 0{,}632$$

6.30 Solution : La courbe inclinée	retour à la question ▲

v = 33,7 m/s



La trajectoire du la voiture, circulaire, se trouve dans un plan horizontal. On doit donc placer l'axe radial à l'horizontale, vers le centre de la courbe, même si la route est inclinée (voir figure ci-contre).

La force de frottement statique agit parallèlement à la route, et si la voiture est à sa vitesse maximale avant de déraper, le frottement agira vers le centre pour éviter que la voiture soit éjectée de la courbe. La force de frottement devra donc être décomposée (voir figure), et la composante radiale (horizontale) est une force centripète.

La force normale, perpendiculaire à la route doit également être décomposée, et sa composante horizontale (radiale), est également une force centripète. Les équations des forces sont :

m : $$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{N} + \vec{f}_s + m\vec{g}$$

$$\sum F_r = ma_r = N\sin\theta + f_s\cos\theta \quad = \quad \frac{mv_t^2}{r} \qquad (1)$$

$$\sum F_y = m\underbrace{a_y}_{=0} = N\cos\theta - f_s\sin\theta - mg \quad = \quad 0 \qquad (2)$$

Puisqu'on est à la limite du dérapage (vitesse maximale), on a $f_s = f_{s\,\max} = \mu_s N$, et les deux équations peuvent s'écrire :

$$(1) \qquad N\sin\theta + (\mu_s N)\cos\theta = \frac{mv_t^2}{r} \quad \Rightarrow \quad N(\sin\theta + \mu_s\cos\theta) = \frac{mv_t^2}{r} \qquad (3)$$

$$(2) \qquad N\cos\theta - (\mu_s N)\sin\theta = mg \quad \Rightarrow \quad N(\cos\theta - \mu_s\sin\theta) = mg \qquad (4)$$

Dans ces deux nouvelles équations, les inconnues sont N, v_t et m. Notons que la masse pourrait disparaître durant le traitement, comme quoi la vitesse maximale est la même sans égard à la masse. On peut isoler la normale N dans l'équation (4) et insérer l'expression de N dans l'équation (3) :

$$(4) \qquad N = \frac{mg}{(\cos\theta - \mu_s\sin\theta)}$$

$$(3) \qquad \frac{mg}{(\cos\theta - \mu_s\sin\theta)} \times (\sin\theta + \mu_s\cos\theta) = \frac{mv_t^2}{r}$$

$$v_t = \sqrt{\frac{(\sin\theta + \mu_s\cos\theta)}{(\cos\theta - \mu_s\sin\theta)} \times gr} \quad = \quad \sqrt{\frac{\sin 8° + 1{,}10\cos 8°}{\cos 8° - 1{,}10\sin 8°} \times 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 79\text{ m}} \quad = \quad 33{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

1 à 9 10 à 20 21 à 32

6.31 Solution : Le satellite retour à la question ▲

v = 7,21×10³ m/s

L'altitude du satellite doit être ajoutée au rayon terrestre pour fournir le rayon de rotation :

$$r = R_T + h$$

La vitesse orbitale, pour cette altitude, est :

$$v_{orb} = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}} = \sqrt{\frac{6{,}674\times10^{-11}\ \frac{\text{N}\times\text{m}^2}{\text{kg}^2}\times 5{,}98\times10^{24}\ \text{kg}}{6{,}38\times10^{6}\ \text{m} + 1{,}300\times10^{6}\ \text{m}}} = 7{,}21\times10^{3}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

6.32 Solution : L'altitude géostationnaire retour à la question ▲

h = 35 900 km

La période de rotation T_{orb} d'un satellite géostationnaire est de 24 h. On l'exprimera en secondes dans le calcul de l'altitude. L'équation de la période orbitale est :

$$T_{orb} = \frac{2\pi r}{v_{orb}}$$

avec $v_{orb} = \sqrt{\dfrac{GM_T}{r}}$ et $r = R_T + h$

Les trois équations réunies entraînent :

$$T_{orb} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\dfrac{GM_T}{r}}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM_T}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 (R_T + h)^3}{GM_T}}$$

On isole h pour calculer l'altitude :

$$h = \sqrt[3]{\frac{GM_T T_{orb}^2}{4\pi^2}} - R_T = \sqrt[3]{\frac{6{,}674\times10^{-11}\ \frac{\text{N}\times\text{m}^2}{\text{kg}^2}\times 5{,}98\times10^{24}\ \text{kg}\times\left(24\ \text{h}\times\frac{3600\ \text{s}}{1\ \text{h}}\right)^2}{4\pi^2}} - 6{,}38\times10^{6}\ \text{m} = 35{,}9\times10^{6}\ \text{m}$$

En kilomètres, cette altitude équivaut à 35 900 km