CH 1 INTRODUCTION

CONSTANTES UTILES

$g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

1 mille = 1,609 km

1 pouce = 2,54 cm

1 pied = 12 pouces

1 kilogramme = 2,2 livres

1.1 UNITÉS ET SYSTÈME INTERNATIONAL

1.1 Exercices : Durée du jour solution ►

Exprimez la durée du jour en nanosecondes.

1.2 Exercices : Gigamètres solution ►

Exprimez 2,00 μm en Gm.

1.3 Exercice : Québec-Cancun solution ►

Dans le monde de l'aviation, les distances s'expriment en milles nautiques (NM, pour *nautical mile*). Un mille nautique équivaut à 1 852 mètres. Exprimez en milles nautiques la distance de 3 182 km entre les aéroports de Québec et Cancun.

1.4 Exercice : En auto au Texas solution ►

Le Texas a établi la limite de vitesse à 85 mph (milles par heure) sur certaines autoroutes. À quelle vitesse cela correspond-t-il :

a) en kilomètres par heure?
b) en mètres par seconde?
c) en circonférences terrestres par semaine?
(circonférence de la Terre : $C_T = 4{,}01\times10^7$ m)

1.5 Exercice : Chute libre solution ►

Dans le système d'unités anglais, l'accélération d'un corps en chute libre s'exprime en pieds par seconde carrée (pi/s²). Quelle est alors la valeur de l'accélération gravitationnelle de 9,81 m/s²?

1.6 Exercice : Achat d'un terrain solution ►

Le prix des terrains à Québec avoisine les 25,0 $ par pied carré. Exprimez cette valeur en $/m². (1 pi = 12 po et 1 po = 2,54 cm).

1.7 Question : Dimensions dérivées solution ►

À partir des dimensions fondamentales masse (M), longueur (L) et temps (T), indiquez quelles sont les dimensions des grandeurs suivantes :

a) un volume;
b) une énergie (donnée par exemple par ½mv²);
c) la *quantité de mouvement* donnée par le produit « masse × vitesse ».

1.8 Question : Grandeur mystère solution ►

Quel type de grandeur obtient-on à partir des dimensions suivantes : $\frac{\text{L}-\text{L}-(\text{LT}^{-2})\cdot\text{T}^2}{\text{T}} + \frac{\text{L}^3\text{T}}{\text{L}^2\text{T}^2}$?

1.9 Question : Dimensions homogènes solution ►

Lors d'une expérience, une vitesse est définie par $v = At^3 + Bt + C$. Déterminez les dimensions de A, de B et de C pour que l'équation soit homogène au niveau des unités.

1.10 Question : Vitesse étrange solution ►

Lorsqu'elle va courir, Jessica écoute de la musique, et court autour de son pâté de maisons, dont le périmètre est de 650 mètres. Les chansons qu'elle écoute durent toutes environ 4 minutes. Si elle court à 12 km/h, exprimez cette vitesse en tours par chanson (tr/ch).

1.11 Question : Homogénéité 1 solution ►

Les équations suivantes sont-elles homogènes au niveau des unités? (Assumez pour chaque variable son utilisation habituelle en mécanique.)

a) $y = x\cdot\tan\theta - \frac{g}{2(v\cdot\cos\theta)^2}$

b) $\frac{1}{2}mv^2 = mgh^2$

c) $mx^2 = \frac{y\cdot F}{t^{-2}}$ (*F* étant une force, en kg·m/s²)

1.12 Exercice : L'Océan Pacifique solution ►

Les plaques tectoniques de l'Amérique du Sud et de l'Australie se rapprochent à la vitesse approximative de 6,05 centimètres par année. Exprimez cette vitesse en km/h. (1 an = 365,24 j)

1.13 Exercice : Accélération intense solution ►

Convertissez l'accélération gravitationnelle de 9,81 m/s² en kilomètres par semaines carrées.

1.14 Question : Homogénéité 2 solution ►

Les équations suivantes sont-elles homogènes au niveau des unités? (Assumez pour chaque variable son utilisation habituelle en mécanique.)

a) $y = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot t(\text{s}) \;-\; \frac{1}{2}\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\times t^2(\text{s}^2)$

b) $x = 42{,}3\ \text{m} \;-\; 21{,}5\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}\cdot t^2$

c) $125\,\frac{\text{km}}{\text{h}\cdot\text{s}}\cdot t \;=\; \frac{25\ \text{s}^{-1}}{13\ \text{m}^{-1}} \;+\; 8{,}00\ s^{-2}\cdot x\cdot t$

d) $a = \frac{25\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{t} \;+\; \frac{2x^2}{t^2} \;-\; 10\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$

e) $n_{pomme} = 8\ \text{sacs de pom.} \;+\; 10\ \text{pom.} \;+\; 25\,\frac{\text{pom.}}{\text{min}}\times 5\ \text{min}$

f) $a = 2\,\frac{\text{pieds}}{\text{s}^2} \;+\; 10{,}5\ \text{m} \;\times\; \frac{5{,}15}{\text{t}^2}$

1.2 LES ORDRES DE GRANDEUR

1.15 Exercice : Beaucoup de cheveux solution ►

En supposant que le cuir chevelu d'un adulte porte environ 3,5 cheveux par millimètre carré, combien de cheveux un adulte aurait-il au total?

1.16 Exercice : Québec-Vancouver solution ►

Combien de pleins d'essence vous faudrait-il pour rouler jusqu'à Vancouver dans une petite voiture?

1.17 Exercice : Usure des pneus solution ►

Un vendeur de pneus vous dit que vous devriez rouler environ 40 000 km avec les pneus qu'il vous suggère d'acheter. Le relief des crampons perdra près d'un centimètre avant que les pneus soient à remplacer. Quelle épaisseur l'usure sur la route ôte-t-elle à la semelle des pneus à chaque tour de roue?

1.18 Exercice : Volume du corps. solution ►

Évaluez le volume de votre corps, en litres.

1.1 - $8{,}64\times10^{13}$ ns — **1.2** - $2{,}00\times10^{-15}$ Gm — **1.3** - 1 718 NM — **1.4** - a) 137 km/h — b) 38,0 m/s — c) 0,573 C_T/sem — **1.5** - 32,2 pi/s² — **1.6** - 269 $/m²
1.7 - a) L^3 — b) ML^2T^{-2} — c) MLT^{-1} — **1.8** - LT^{-1} — **1.9** - *A* : LT^{-4}, *B* : LT^{-2}, *C* : LT^{-1} — **1.10** - 1,23 tr/ch
1.11 - a) Non homogène — b) Non homogène — c) Homogène — **1.12** - $6{,}90\times10^{-9}$km/h — **1.13** - $3{,}59\times10^{9}$ km/sem²
1.14 - a) Non homogène — b) Homogène — c) Homogène — d) Non homogène — e) Homogène — f) Homogène — **1.15** - 140 000 à 200 000 cheveux
1.16 - 8 à 10 pleins — **1.17** - 5×10^{-10} m/tr — **1.18** - 45 à 90 L

Équations/Constantes Sect 1.1, #1 à 14 Sect 1.2, #15 à 18

CH 1 INTRODUCTION

1.1 UNITÉS ET SYSTÈME INTERNATIONAL

1.1 Solution : Durée du jour retour à la question ▲

1 j = 8,64× 10^{13} ns

Une nanoseconde (très petite) correspond à 10^{-9} s, donc le facteur de conversion à utiliser est 1 ns = 10^{-9} s ou 1 s = 10^{9} ns :

$$1\text{ j} = 1\text{ j} \times \frac{24\text{ h}}{1\text{ j}} \times \frac{3\,600\text{ s}}{1\text{ h}} \times \frac{1\text{ ns}}{10^{-9}\text{ s}} \quad = \quad \mathbf{8,64 \times 10^{13}\ ns}$$

retour à la question ▲

1.2 Solution : Gigamètres retour à la question ▲

2,00 µm = 2,00×10^{-15} Gm

Un micromètre (µm) équivaut à 10^{-6} m, et un gigamètre équivaut à 10^{9} m. Il est préférable de passer par les mètres pour n'utiliser que les rapports connus :

$$2{,}00\ \mu\text{m} = 2{,}00\mu\text{m} \times \frac{10^{-6}\text{ m}}{1\ \mu\text{m}} \times \frac{1\text{ Gm}}{10^{9}\text{ m}} \quad = \quad \mathbf{2,00 \times 10^{-15}\ Gm}$$

retour à la question ▲

1.3 Solution : Québec-Cancun retour à la question ▲

d = 1 718 NM

On multiplie la distance de 3 182 km par des facteurs de conversion faisant apparaître les mètres et ensuite les milles nautiques.

$$3\,182\text{ km} = 3\,182\text{ km} \times \frac{1\,000\text{ m}}{1\text{ km}} \times \frac{1\text{ NM}}{1\,852\text{ m}} \quad = \quad \mathbf{1\,718\ NM}$$

Alternativement, pour ne faire qu'une conversion, on pourrait adapter le facteur de conversion aux kilomètres : 1 NM = 1 852 m = 1,852 km :

$$3\,182\text{ km} = 3\,182\text{ km} \times \frac{1\text{ NM}}{1{,}852\text{ m}} \quad = \quad \mathbf{1\,718\ NM}$$

retour à la question ▲

1.4 Solution : En auto au Texas retour à la question ▲

a) *v* = 137 km/h

$$85\,\frac{\text{mi}}{\text{h}} = \frac{85\text{ mi}}{1\text{ h}} \times \frac{1{,}609\text{ km}}{1\text{ mi}} \quad = \quad \mathbf{137\ \frac{km}{h}}$$

b) *v* = 38,0 m/s

Le facteur de conversion des milles aux kilomètres permet rapidement une conversion vers les metrès :

$$1\text{ mi} = 1{,}609\text{ km} \quad = \quad 1\,609\text{ m}$$

En convertissant d'abord la distance et ensuite le temps :

$$85\,\frac{\text{mi}}{\text{h}} = \frac{85\text{ mi}}{1\text{ h}} \times \frac{1\,609\text{ m}}{1\text{ mi}} \quad = \quad \mathbf{38,0\ \frac{m}{s}}$$

c) *v* = 0,573 C_T/sem

Puisque la circonférence de la Terre est exprimée en mètres, on doit passer par les mètres lors de la conversion. En convertissant d'abord la distance et ensuite le temps :

$$85\,\frac{\text{mi}}{\text{h}} = \frac{85\text{ mi}}{1\text{ h}} \times \frac{1\,609\text{ m}}{1\text{ mi}} \times \frac{1\ C_T}{4{,}01\times10^{7}\text{ m}} \times \frac{24\text{ h}}{1\text{ j}} \times \frac{7\text{ j}}{1\text{ sem}} \quad = \quad \mathbf{0,573\ \frac{C_T}{sem}}$$

retour à la question ▲

1.5 Solution : Chute libre retour à la question ▲

g = 32,2 pi/s²

Seule les unités de distances doivent être converties, mais on doit passer par les centimètres et les pouces car on ne dispose pas du facteur de conversion direct des mètres aux pieds :

$$9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \frac{9{,}81\ \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \times \frac{100\ \mathrm{cm}}{1\ \mathrm{m}} \times \frac{1\ \mathrm{po}}{2{,}54\ \mathrm{cm}} \times \frac{1\ \mathrm{pi}}{12\ \mathrm{po}} \quad = \quad \mathbf{32{,}2\ \frac{pi}{s^2}}$$

retour à la question ▲

1.6 Solution : Achat d'un terrain retour à la question ▲

P = 269 $/m²

Le facteur de conversion impliquant les distances doit être mis au carré pour convertir des superficies. Aussi, on doit passer par les centimètres et les pouces car on ne dispose pas du facteur de conversion des pieds en mètres :

$$25{,}0\ \frac{\$}{\mathrm{pi}^2} = \frac{25{,}0\ \$}{\mathrm{pi}^2} \times \left(\frac{1\ \mathrm{pi}}{12\ \mathrm{po}}\right)^2 \times \left(\frac{1\ \mathrm{po}}{2{,}54\ \mathrm{cm}}\right)^2 \times \left(\frac{100\ \mathrm{cm}}{1\ \mathrm{m}}\right)^2 \quad = \quad \mathbf{269\ \frac{\$}{m^2}}$$

retour à la question ▲

1.7 Solution : Dimensions dérivées retour à la question ▲

a) L³

Un volume est défini par le produit d'une longueur par une longueur et encore par une longueur :

$$\mathrm{L} \times \mathrm{L} \times \mathrm{L} = \mathbf{L^3}$$

b) ML²T⁻²

Si on utilise l'expression donnée qui est une forme d'énergie (l'énergie cinétique), on trouve :

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{M} \times \left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}\right)^2 = \mathbf{ML^2T^{-2}}$$

Évidemment, le terme ½ ne change rien aux dimensions impliquées et peut disparaître de l'analyse dimensionnelle.

c) MLT⁻¹

À partir de l'expression donnée, où une masse est multipliée par une vitesse, on trouve :

$$\mathrm{M} \times \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{T}} \quad = \quad \mathbf{MLT^{-1}}$$

retour à la question ▲

1.8 Solution : Grandeur mystère retour à la question ▲

LT⁻¹

Il suffit de simplifier les expressions données pour connaître les dimensions concernées. Si l'équation est homogène, les deux termes devraient avoir les mêmes dimensions.

$$\frac{\mathrm{L{-}L{-}(LT^{-2})\cdot T^2}}{\mathrm{T}} + \frac{\mathrm{L^3T}}{\mathrm{L^2T^2}} \quad = \quad \frac{\mathrm{L{-}L{-}L}}{\mathrm{T}} \quad = \quad \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}} + \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}} \quad = \quad \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}} \quad = \quad \mathbf{LT^{-1}}$$

Remarque : dans le premier terme, la portion « *L–L–L* » donne *L*, car au niveau des unités, une longueur soustraite à une autre longueur donne tout de même une longueur.

Les dimensions sont une longueur sur un temps, donc une vitesse.

retour à la question ▲

1.9 Solution : Dimensions homogènes retour à la question ▲

A : LT^{-4}, *B* : LT^{-2}, *C* : LT^{-1}

Pour obtenir une vitesse avec cette équation, chacun des trois termes doit avoir des dimensions de vitesse. On peut donc les traiter distinctement.

Le terme « At^3 » (dont les dimensions sont $A \cdot T^{-3}$) doit être une vitesse (LT^{-1}), c'est-à-dire que :

$$A \times \mathrm{T}^3 = \mathrm{LT}^{-1}$$

On peut isoler *A* pour identifier ses dimensions :

$$A = \frac{\mathrm{LT}^{-1}}{\mathrm{T}^3} \quad = \quad \mathbf{LT^{-4}}$$

Ces dimensions ne réfèrent pas à une grandeur concrète en physique, mais sont néanmoins celles qui permettent à l'équation d'être homogène.

Le terme « *Bt* » (dont les dimensions sont $A \cdot T$) doit être une vitesse (LT^{-1}), c'est-à-dire que :

$$B \times \mathrm{T} = \mathrm{LT}^{-1}$$

On peut isoler *B* pour identifier ses dimensions :

$$B = \frac{\mathrm{LT}^{-1}}{\mathrm{T}} \quad = \quad \mathbf{LT^{-2}}$$

Ces dimensions sont celles d'une accélération (longueur du temps au carré).

Le terme « *C* » doit porter à lui seul les dimensions d'une vitesse (LT^{-1}), pour rendre l'équation homogène, donc :

$$C = \mathbf{LT^{-1}}$$

retour à la question ▲

1.10 Solution : Vitesse étrange retour à la question ▲

v = 1,23 tr/ch

On connaît la vitesse de Jessica en kilomètres par heure. Écrivons d'abord cette vitesse sous forme de fraction, et convertissons-la en mètres par minute pour faire le lien avec les facteurs de conversion de mètres par tours et de minutes par chanson :

$$12\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \frac{12\ \mathrm{km}}{1\ \mathrm{h}} \times \frac{1\,000\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{km}} \times \frac{1\ \mathrm{h}}{60\ \mathrm{min}} \quad = \quad 200\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}}$$

Multiplions ensuite cette vitesse par les facteurs de conversion qui changent les mètres en tours (tr) et les minutes en chansons (ch) :

$$200\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}} = \frac{200\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{min}} \times \frac{1\ \mathrm{tr}}{650\ \mathrm{m}} \times \frac{4\ \mathrm{min}}{1\ \mathrm{ch}} \quad = \quad \mathbf{1{,}23\,\frac{tr}{ch}}$$

retour à la question ▲

1.11 Solution : Homogénéité 1 retour à la question ▲

a) Non homogène

$$y \stackrel{?}{\cong} x \cdot \tan\theta - \frac{g}{2(v \cdot \cos\theta)^2}$$

L'utilisation habituelle de *y* est une position ou distance, en mètres (dans le SI). On doit donc vérifier si le terme de droite est également en mètres. Si on remplace les variables par leurs unités habituelles dans le système international, on a :

$$\mathrm{m} \stackrel{?}{\cong} \mathrm{m} \cdot \tan\theta - \frac{\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)}{2\left(\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) \cdot \cos\theta\right)^2}$$

Les constantes (comme le « 2 ») n'ont pas d'unités et peuvent être retirées. Aussi, les fonctions trigonométriques donnent des rapports sans unités à partir d'un angle, et peuvent aussi être retirées sans altérer les unités :

$$\mathrm{m} \neq \mathrm{m} - \frac{\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)}{\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} \quad = \quad \mathrm{m} - \frac{1}{\mathrm{m}} \quad = \quad \emptyset$$

Cette équation n'est donc pas homogène.

b) Non homogène

$$\tfrac{1}{2} m v^2 \stackrel{?}{\cong} m g h^2$$

Remplaçons les variables par leurs unités habituelles dans le système international. En rayant le terme ½ qui n'a aucun effet sur les unités :

$$\mathrm{kg} \cdot \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 \stackrel{?}{\cong} \mathrm{kg} \cdot \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) \cdot \mathrm{m}^2 \qquad \text{En simplifiant :} \qquad \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \neq \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}^2}$$

L'équation n'est donc pas homogène.

c) Homogène

$$m x^2 \stackrel{?}{\cong} \frac{y \cdot F}{t^{-2}}$$

Remplaçons les variables par leurs unités habituelles dans le système international.

$$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \stackrel{?}{\cong} \frac{\mathrm{m} \cdot \left(\frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)}{\mathrm{s}^{-2}}$$

En simplifiant :

$$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 = \frac{\left(\frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}\right)}{\mathrm{s}^{-2}} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$$

Cette équation est donc homogène.

retour à la question ▲

1.12 Solution : L'Océan Pacifique retour à la question ▲

v = 6,90×10^{-9} km/h

La conversion des centimètres en kilomètres peut se faire en deux étapes en passant par les mètres. Pour les unités de temps, on passera par le nombre de jours en une année : 365,24 :

$$6{,}05\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{a}} \times \frac{1\ \mathrm{m}}{100\ \mathrm{cm}} \times \frac{1\ \mathrm{km}}{1\ 000\ \mathrm{m}} \times \frac{1\ \mathrm{a}}{365{,}24\ \mathrm{j}} \times \frac{1\ \mathrm{j}}{24\ \mathrm{h}} \quad = \quad \mathbf{6{,}90 \times 10^{-9}\ \frac{km}{h}}$$

ATTENTION : Sur certaines calculatrices, le bon calcul pourrait afficher une valeur incorrecte indiquant « 0,000 000 006 » km/h ou « 0,000 000 007 » km/h. Si c'est votre cas, votre calculatrice comporte un défaut de conception faisant en sorte qu'elle ne passe pas en affichage scientifique tant qu'un chiffre autre que zéro se trouve à la 9e décimale ou à gauche. De plus, au lieu d'arrondir ce chiffre en fonction des suivants, certains modèles *tronquent* simplement le nombre après le 6. Il suffit parfois de passer en affichage scientifique pendant que l'affichage montre ce résultat.

Si votre calculatrice Sharp se comporte ainsi, vous pouvez corriger cette situation de façon permanente en changeant son mode d'affichage : appuyez sur « Set up » et sur « 1 » (pour accéder au menu FSE (pour Floating number, Scientific et Engineering)) et appuyez ensuite sur « ↓ » (le flèche vers le bas). Vous apercevez alors les modes Norm1 et Norm2, et votre calculatrice se trouve par défaut dans le mode Norm1 qui produit l'erreur. Appuyez donc sur « 4 » pour le mode Norm2, et refaites le calcul de l'exercice. Votre affichage passera en notation scientifique dès qu'il existe assez de chiffres pour justifier cet affichage.

retour à la question ▲

retour à la question ▲

1.13 Solution : Accélération intense retour à la question ▲

g = 3,59×10⁹ km/sem²

La conversion des mètres en kilomètres se fait en une seule étape; on multipliera donc l'accélération de 9,81 m/s² par le facteur de conversion des mètres aux kilomètres (1 km = 1 000 m). Pour les unités de temps, on doit passer des secondes aux semaines en quelques étapes. Chaque facteur de conversion sera mis au carré pour tenir compte des secondes carrées :

$$9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \times \frac{1\ \mathrm{km}}{1\ 000\ \mathrm{m}} \times \left(\frac{3\ 600\ \mathrm{s}}{1\ \mathrm{h}}\right)^2 \times \left(\frac{24\ \mathrm{h}}{1\ \mathrm{j}}\right)^2 \times \left(\frac{7\ \mathrm{j}}{1\ \mathrm{sem}}\right)^2 \quad = \quad \mathbf{3{,}59 \times 10^9\ \frac{km}{sem^2}}$$

retour à la question ▲

1.14 Solution : Homogénéité 2 retour à la question ▲

a) Non homogène

$$y = 10\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t(\mathrm{s}) \quad - \quad \tfrac{1}{2} \cdot 9{,}81\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \times t^2(\mathrm{s}^2)$$

Le terme de gauche « y » est une position (la dimension de ce terme est une longueur). On doit donc vérifier si les deux termes de droite sont également dans des dimensions de longueur.

Pour le terme « $10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \times t(\mathrm{s})$ », les dimensions, sont :

$$\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \times \mathrm{s} \times (\mathrm{s}) = \tfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}} \times \mathrm{T} \times \mathrm{T} \quad = \quad \mathrm{LT}$$

On constate déjà que le premier terme de droite n'est pas dans les mêmes dimensions que le terme de gauche. L'équation n'est donc pas homogène.

Remarque : l'inscription « t(s) » n'est pas une manière correcte de préciser que le temps est en secondes. Les unités sont à l'intérieur de la variable. Il n'est d'ailleurs pas nécessaire que les unités soient des secondes pour le temps; le temps peut être en heures, ce qui n'affecte pas l'homogénéité d'une équation, en autant que les dimensions soient des dimensions de temps.

b) Homogène

$$x = 42{,}3\ \mathrm{m} \quad - \quad 21{,}5\ \tfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2$$

Le terme de gauche est une position (la dimension de ce terme est une longueur). On doit donc vérifier si les deux termes de droite sont également dans des dimensions de longueur.

Le 1er terme de droite, « 42,3 m », est effectivement une longueur. Ce terme est compatible avec le terme de gauche.

Le second terme, « $21{,}5\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2$ », comporte des dimensions qu'on peut détailler et simplifier par :

$$\tfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2 = \tfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^2} \cdot \mathrm{T}^2 \quad = \quad \mathrm{L}.$$

Il s'agit donc également d'une longueur, et l'équation est homogène.

Remarque : Il n'est pas important que les unités soient les mêmes, seulement les dimensions. Qu'une longueur soit en centimètres ou en mètres n'empêche pas une équation d'être homogène.

c) Homogène

$$125\ \tfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h \cdot s}} \cdot \mathrm{t} = \frac{25\ \mathrm{s}^{-1}}{13\ \mathrm{m}^{-1}} \quad + \quad 8{,}00\ \mathrm{s}^{-2} \cdot x \cdot t$$

Le terme de gauche exige déjà une certaine simplification pour en identifier les dimensions :

$$\tfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h \cdot s}} \cdot \mathrm{t} = \tfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{T \cdot T}} \cdot \mathrm{T} \quad = \quad \mathrm{LT}^{-1}.$$

Il s'agit donc d'une vitesse. Le premier terme de droite exige aussi une transformation pour en identifier les dimensions :

$$\frac{\mathrm{s}^{-1}}{\mathrm{m}^{-1}} = \frac{\mathrm{T}^{-1}}{\mathrm{L}^{-1}} \quad = \quad \mathrm{LT}^{-1}$$

Il est compatible avec la vitesse attendue. Pour le second terme de droite, on peut identifier les dimensions par :

$$\mathrm{s}^{-2} \cdot x \cdot t = \mathrm{T}^{-2} \cdot \mathrm{L} \cdot \mathrm{T} \quad = \quad \mathrm{LT}^{-1}$$

Il s'agit également des dimensions d'une vitesse, et l'équation est donc homogène.

retour à la question ▲
retour à la question ▲

d) Non homogène

$$a = \frac{25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{t} \quad + \quad \frac{2x^2}{t^2} \quad - \quad 10\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Le terme de gauche est une accélération, dont les dimensions sont LT^{-2}.

On trouve trois termes à droite. Le premier terme est bien une accélération :

$$\frac{\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)}{t} = \frac{\left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}\right)}{\mathrm{T}} \quad = \quad \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^2} \quad = \quad \mathrm{LT}^{-2}.$$

Pour le second terme :

$$\frac{x^2}{t^2} = \frac{\mathrm{L}^2}{\mathrm{T}^2} \quad = \quad \mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-2}$$

Ce deuxième terme n'est pas une accélération et l'équation n'est donc pas homogène. Inutile de vérifier le 3^{e} terme, qui n'est pas une accélération non plus.

retour à la question ▲

e) Homogène

$$n_{pommes} = 10\ \mathrm{pom.} \quad + \quad 8\ \text{sacs de pom.} \quad + \quad 25\,\frac{\mathrm{pom.}}{\mathrm{min}} \cdot 5\ \mathrm{s}$$

Malgré qu'il s'agisse d'unités peu courantes (en sciences à tout le moins), notre souci n'est que de vérifier si l'équation est homogène au niveau des unités ou des dimensions. On comprend que le terme de gauche est une quantité de pommes. Les trois termes de droite sont-ils en pommes également?

Clairement, le premier terme est un nombre de pommes également.

Le second terme, revient également à un nombre de pommes (comme les kilomètres qui sont des milliers de mètres, on peut concevoir que les sacs-de-pommes sont une quantité constante de pommes, même si cette quantité est inconnue).

Finalement le troisième terme demande une simplification :

$$\frac{\mathrm{pom.}}{\mathrm{min}} \cdot \mathrm{s} \quad = \quad \frac{\mathrm{pom.}}{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{T} \quad = \quad \mathrm{pom.}$$

Tous les termes représentent donc une quantité de pommes et l'équation est homogène.

retour à la question ▲

f) Homogène

$$a = 2\,\frac{\mathrm{pieds}}{\mathrm{s}^2} \quad + \quad 10{,}5\ \mathrm{m} \times \frac{5{,}15}{\mathrm{t}^2}$$

Le terme de gauche est une accélération, dont les dimensions sont LT^{-2}.

Le premier terme de droite, même s'il comporte des unités de distances n'appartenant pas au système métrique, comporte tout de même des dimensions LT^{-2}. Jusque-là, l'équation est homogène.

Le second terme ne se limite pas à « 10,5 m », mais aux deux parties du produit. Ses dimensions sont :

$$m \times \frac{1}{t^2} \quad = \quad \mathrm{L} \cdot \frac{1}{\mathrm{T}^2} \quad = \quad \mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-2}$$

Il s'agit également d'une accélération et l'équation est donc homogène.

retour à la question ▲

1.2 LES ORDRES DE GRANDEUR

1.15 Solution : Beaucoup de cheveux retour à la question ▲

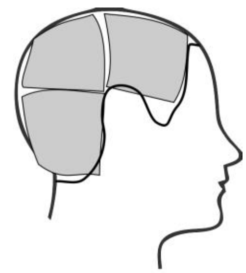
n = 140 000 à 200 000 cheveux

On cherche une valeur très approximative du nombre de cheveux d'une tête normalement recouverte. La seule donnée à évaluer, puisque l'on connaît déjà la densité de cheveux (désignons-la par *d*), est la superficie *A* recouverte de cheveux. Le nombre *n* de cheveux serait alors :

$$n = d \cdot A$$

Évaluer directement le nombre de millimètres carrés n'est pas simple en soi. Par contre, on peut simplifier la chose de deux manières.

1ère manière : subdivisions à zone plus facile à dénombrer

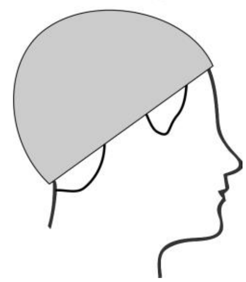


On peut imaginer des sections à peu près carrées de 10 cm par 10 cm, donc des surfaces de 10 000 mm², et estimer le nombre de ces surfaces de 10 cm × 10 cm sur une tête d'adulte. Cela demeure une approximation mais la quantité recherchée se compte sur les doigts des mains. C'est au moins 3 ou 4 tels carrés, et certainement moins que 10. La figure ci-contre permet d'estimer cette quantité sur une moitié de la tête, et on peut l'estimer à 3 carrés de 10 000 mm².

Il y aurait alors environ 6 portions de 10 000 mm², donc une surface totale chevelue de 60 000 mm². Le nombre de cheveux serait alors :

$$n = d \cdot A \quad = \quad 3{,}5\,\frac{\text{cheveux}}{\text{mm}^2} \times 60\,000\ \text{mm}^2 \quad \approx \quad \mathbf{200\,000\ cheveux}$$

2e manière : Le crâne chevelu comme hémisphère



On peut assez facilement assimiler la surface chevelue de la tête à une demi-sphère. Pensez à une tuque, qui couvre les cheveux. On peut la placer de façon à couvrir un peu de peau nue, mais à ne pas couvrir parfaitement tous les cheveux. Ces deux faits peuvent s'annuler approximativement. Si la bordure de la tuque suit un grand cercle autour de la tête, la portion chevelue est alors une demi-sphère, et estimer son rayon est la seule valeur manquante.

Même si la tête n'est pas une sphère parfaite, on cherche une approximation seulement. Estimons le rayon à environ 8 cm. Parfois plus, parfois moins, ça dépend aussi du lieu de mesure sur la tête. Puisque l'aire recherchée est la moitié de l'aire d'une sphère :

$$n = d \cdot A \quad = \quad d \cdot \left(\tfrac{1}{2} \times 4\pi r^2\right)$$

$$= 3{,}5\,\frac{\text{cheveux}}{\text{mm}^2} \times \left(\tfrac{1}{2} \times 4\pi(80\ \text{mm})^2\right) \quad \approx \quad \mathbf{140\,000\ cheveux}$$

Les valeurs trouvées selon les deux méthodes ne sont pas très rapprochées, mais sont du même ordre de grandeur. On peut donc affirmer que les valeurs autour de 140 000 à 200 000 cheveux sont valides (peut être légèrement supérieur ou inférieur également tout en étant acceptable).

retour à la question ▲

1.16 Solution : Québec-Vancouver retour à la question ▲

n = 8 à 10 pleins

Pour les besoins d'une telle approximation, on peut réduire à deux valeur simples les variables utiles, soit la distance à parcourir et la distance parcourue avec un plein (l'autonomie).

Une recherche sur Internet nous renseigne vite. On peut inscrire dans Google la simple entrée « Québec Vancouver », et l'un des liens est la distance selon le meilleur itinéraire, d'environ 5 200 km.

Ensuite, l'autonomie d'une voiture dépend évidemment du type de voiture; mais à moins de considérer une voiture particulièrement énergivore ou économique, les valeurs trouvées seront toutes du même ordre, soit entre 500 km et 700 km pour de longues distances sur l'autoroute. D'ailleurs, les voitures qui consomment davantage ont souvent un réservoir plus grand et ont une autonomie assez comparable malgré tout. Si vous avez une auto, vous connaissez sans doute déjà cette valeur approximative.

Donc, par calcul, le nombre de plein est donné simplement par le rapport de la distance à parcourir sur la distance parcourue à l'aide de chaque plein. En utilisant 600 km comme autonomie typique :

$$n = \frac{d_{Q-V}}{d_{plein}} \quad = \quad \frac{5\,200\ \text{km}}{600\ \text{km}} \quad = \quad 8{,}\overline{66}$$

Il y a lieu de se limiter à une valeur arrondie à l'unité, vu l'imprécision des valeurs utilisées. Qui plus est, ce voyage nécessite à tout coup des détours pour se nourrir et se loger. On pourrait donc arrondir à 9. Et vu la variabilité dans l'autonomie des différentes voitures, il est tout à propos aussi d'exprimer que la quantité est d'environ 8 à 10 pleins d'essence.

retour à la question ▲

retour à la question ▲

1.17 Solution : Usure des pneus retour à la question ▲

Δe_{tr} = 5×10^{-10} m/tr

On nous indique que les crampons perdront environ un centimètre au cours des 40 000 km parcouru par le pneu. L'information manquante est le nombre de tours de la roue sur cette distance, pour associer une petite épaisseur perdue à chaque tour. Le nombre de tours de roue est lié au kilométrage parcouru par la circonférence de la roue. On a donc besoin d'une estimation du rayon de la roue.

Le rayon des roues d'auto (rayon extérieur du pneu) varie évidemment d'une voiture à l'autre, mais les valeurs rencontrées sont quand même toutes du même ordre (à preuve, aucun véhicule de promenade n'a de pneus deux fois plus gros que celui dont les pneus sont les plus petits). Il vous faut donc observer une auto de taille moyenne et estimer le rayon ou le diamètre du pneu. Sans même se déplacer, on peut s'imaginer placer une règle de 30 cm verticalement contre une roue d'auto. On peut alors raisonnablement imaginer que la règle appuyée au sol s'étend vers le haut jusqu'au centre de la roue, précisément, ce qui lui donne un rayon de 30 cm. La circonférence peut alors être évaluée :

$$C = 2\pi r \quad = \quad 2\pi \times 0{,}30 \text{ m} \quad \approx \quad 2 \text{ m}$$

(Nul besoin, pour obtenir un ordre de grandeur, de conserver des résultats précis. Une circonférence de 2 m suffit ici car cette donnée varie de quelques dizaines de pourcents entre des petites roues et des grosses roues.)

Le nombre de tours effectués par le pneu durant sa vie utile est alors :

$$n_{tours} = \frac{d_{tot}}{C} \quad = \quad \frac{40\,000 \text{ km}}{2\,\frac{\text{m}}{\text{tr}}} \quad = \quad \frac{4\times 10^7 \text{ m}}{2 \text{ m}} \quad = \quad 2 \times 10^7 \text{ tr}$$

Finalement, si la semelle s'amincit de 1 cm lorsque le pneu effectue 2× 10^7 tr, l'épaisseur perdue chaque tour est :

$$\Delta e_{tr} = \frac{\Delta e_{tot}}{n_{tr}} \quad = \quad \frac{1 \text{ cm}}{2\times 10^7 \text{ tr}} \quad = \quad \frac{0{,}01 \text{ m}}{2\times 10^7 \text{ tr}} \quad = \quad \mathbf{5 \times 10^{-10}\ \frac{m}{tr}}$$

Cette épaisseur est de l'ordre des dimensions d'un atome. L'usure d'un pneu est somme toute très lente. Qui plus est, les manœuvres d'accélération intenses (incluant les freinages) contribuent beaucoup plus à l'usure. Les températures élevées sont également un facteur important. C'est donc dire que pour certaines conditions moins chaudes et une conduite conservatrice, l'usure des pneus est quasi nulle.

retour à la question ▲

1.18 Solution : Volume du corps retour à la question ▲

V = 45 à 90 litres

Le corps a une forme très complexe et évaluer son volume par des calculs géométriques serait très fastidieux. Par contre, on peut utiliser des informations très familières pour évaluer ce volume. Chacun sait que dans l'eau, une personne flotte lorsque son corps est presque entièrement submergé. Cela confirme assez clairement que la densité du corps est très semblable à celle de l'eau (ce qu'on sait aussi à partir du fait que le corps est composé majoritairement d'eau). Ainsi, si vous connaissez votre masse, votre volume est à peu près le même que le volume occupé par une masse d'eau identique.

Il s'agit maintenant d'identifier une valeur de masse à utiliser. Puisqu'on mentionne dans l'énoncé votre propre volume, cette valeur varie entre une centaine de livres pour une jeune femme menue à près de 200 livres pour un jeune homme costaud. Ces masses exprimées en kilogrammes (1 kg = 2,2 lbs) vont de 45 kg à 90 kg.

Finalement, le volume d'eau ayant ces masses s'évalue rapidement car la définition du litre est pratiquement le volume occupé par un kilogramme d'eau. Ainsi, les volumes du corps d'un étudiant d'une vingtaine d'années varient de 45 litres à 90 litres.

Quoiqu'assez distantes, ces valeurs sont toutes deux du même ordre de grandeur.

retour à la question ▲